



Guía teórica – práctica

Ecuaciones

Una **ecuación** es una **igualdad** que se cumple para ciertos valores de las variables (letras).

Por ejemplo:

$$x + 1 = 2 \rightarrow x = 2 - 1 \rightarrow x = 1 \text{ es decir que la igualdad se cumple solo para el valor de } x=1$$

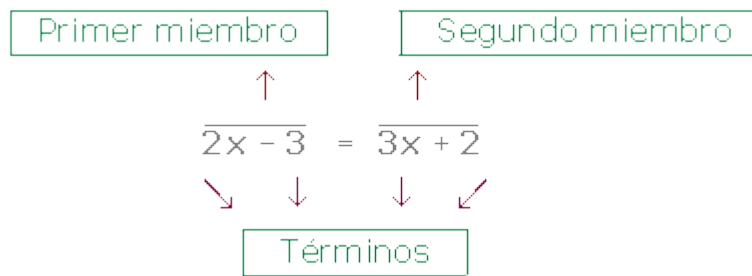
Elementos de una ecuación

1) Miembros

Los **miembros** de una **ecuación** son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.

2) Términos

Los **términos** de una **ecuación** son los **sumandos** que forman los **miembros** de una **ecuación**.



3) Incógnitas

La **incógnita** de una **ecuación** es el valor desconocido que se pretende determinar y se suele expresar con la letra **x**.

4) Soluciones

Las **soluciones** de una **ecuación** son los **valores** que deben tomar las **letras** para que la **igualdad** sea **cierta**.

$$2x - 3 = 3x + 2 \rightarrow 2x - 3x = 2 + 3 \rightarrow -x = 5 \rightarrow x = -5$$

Reemplazando:

$$2 \cdot (-5) - 3 = 3 \cdot (-5) + 2$$

$$-10 - 3 = -15 + 2 \rightarrow -13 = -13$$



Matemáticas

UNSL-FTU

Profesor Responsable: Ing. Marcelo Muñoz
Profesor Auxiliar: Ing. Verónica E. Escudero

5) Grado

El **grado** de una **ecuación** es el **mayor de los grados** de los **monomios** que forman sus **miembros**.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA



Las ecuaciones de primer grado, que también se llaman **lineales**, son de la forma $ax + b = 0$ donde la incógnita x está elevada al exponente 1, el coeficiente a debe ser **distinto de cero** y el **término independiente** b un número cualquiera.

Para resolver la ecuación $ax + b = 0$ solo hace falta despejar el valor de la variable x :

Por ejemplo:

$$\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19$$

Quitamos paréntesis y simplificamos:

$$\frac{6}{4}x + \frac{12}{4} = x + 19 \quad \frac{3}{2}x + 3 = x + 19$$

Resolvemos para quitar los denominadores, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$$3x + 6 = 2x + 38 \quad 3x - 2x = 38 - 6 \quad x = 32$$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Las **ecuaciones de segundo grado** son las expresiones de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

Para **resolver ecuaciones de segundo grado** utilizamos la siguiente fórmula (ya vista en el tema anterior):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$



Matemáticas

UNSL-FTU

Profesor Responsable: Ing. Marcelo Muñoz
Profesor Auxiliar: Ing. Verónica E. Escudero

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

$\nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3$
 $\searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2$

Así, x_1 y x_2 son los valores de la variable que cumplen con la igualdad: $x^2 - 5x + 6 = 0$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Una **ecuación de primer grado con dos incógnitas** es una expresión de la forma:

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

donde, x e y son las incógnitas, a y b son los coeficientes y c el término independiente.

Una solución de la ecuación es un par de valores reales (X, Y). Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas tienen **infinitas soluciones** (para cada valor de x habrá un valor de y) y la representación gráfica de estas soluciones es una **recta**.

Ejemplo de aplicación:

Dada la expresión: $-2x + y = 1$

Para su resolución primero se debe despejar “ y como una función de x ”:

$$y = 2x + 1$$

Luego se le dan diferentes valores a x (cualesquiera, preferentemente aquellos que luego no nos traigan problemas en su representación gráfica) y se hallan sus correspondientes valores de y :

X	Y=2X+1
-1	-1
0	1
1	3
2	5

Finalmente representamos los valores de la tabla en un plano cartesiano. En el eje **horizontal** se representan los valores de la variable **X** y en el eje **vertical** los valores de la variable **Y**. Es decir que, representaremos una serie de puntos $P(x, y)$, que en nuestro ejemplo son: $P(-1, -1)$, $P(0, 1)$, $P(1, 3)$, $P(2, 5)$. El $P(-1, -1)$ significa que cuando X toma el valor -1 , la variable Y toma el valor -1 , lo que puede fácilmente representarse en un plano cartesiano (conviene siempre utilizar hojas cuadrículadas para que la representación sea más fácil de realizar):



Matemáticas

UNSL-FTU

Profesor Responsable: Ing. Marcelo Muñoz
Profesor Auxiliar: Ing. Verónica E. Escudero

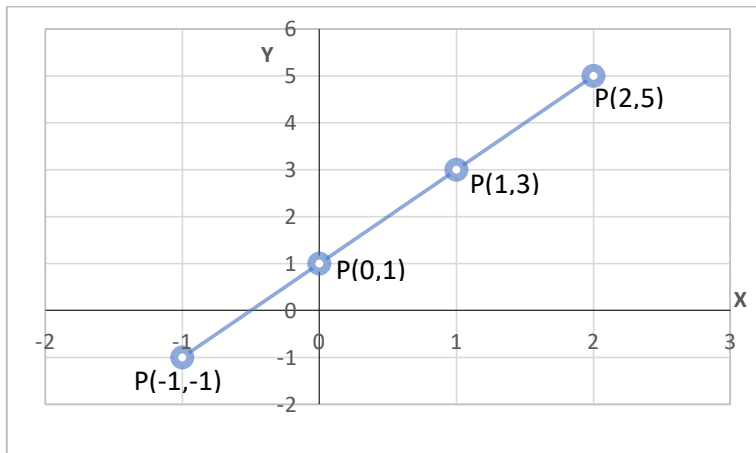


Figura 1

Como se puede observar en la Figura 1, la gráfica obtenida es una **RECTA** y por lo tanto para representarla se necesitan como mínimo dos valores de la variable X y dos de la variable Y, es decir, como mínimo dos puntos $P(X,Y)$.

Pendiente de la recta:

Se llama pendiente de la recta a la inclinación de la misma con respecto al eje horizontal.

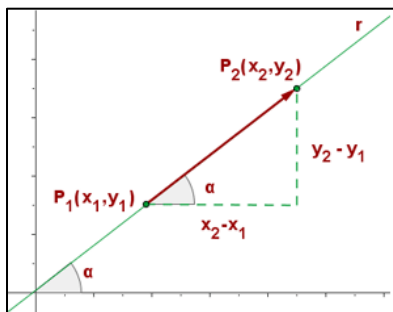
Como vimos en el ejemplo, una recta siempre toma la forma:

$$y = mx + b$$

donde m (también llamada α) y b números reales y **m es la pendiente de la recta** y **b es la ordenada en el origen**, o sea el valor de la variable “Y” donde la recta corta al eje vertical, es decir el punto $P(0,b)$.

Para determinar la pendiente de una recta, se necesitan como mínimo dos puntos y su fórmula es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Según sea el signo de m , tendremos diferentes tipos de rectas:



Matemáticas

UNSL-FTU

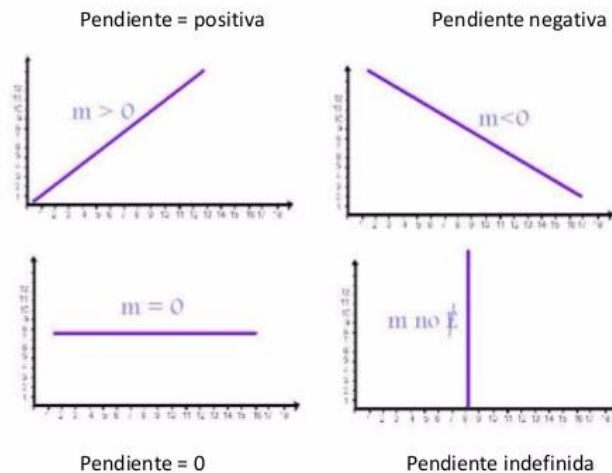
Profesor Responsable: Ing. Marcelo Muñoz
Profesor Auxiliar: Ing. Verónica E. Escudero

Si $m > 0$ la recta es creciente y el ángulo que se forma entre la recta y el eje X es agudo.

Si $m < 0$ la recta es decreciente y el ángulo que se forma entre la recta y el eje X es obtuso.

Si $m = 0$, la recta es constante y la gráfica es paralela al eje X.

Tipos de Pendiente



A tener en cuenta:

- Si $b=0$ la recta toma la forma $y = mx$, y la llamamos función lineal. Esta función pasa por el origen de coordenadas.
- Si $b \neq 0$ la recta es de la forma $y = mx + b$ y la llamamos función afín.
- **Dos rectas son paralelas** si tienen la misma pendiente y distinta ordenada b en el origen.
- **Dos rectas son secantes** si tienen distinta pendiente.

Siguiendo con el ejemplo anterior: $y = 2x + 1$, claramente podemos ver que su pendiente es $m=2$, ya que el número 2 es el que acompaña a la variable x en la ecuación general de la recta ($y = mx + b$). La ordenada al origen es $b=1$, por lo tanto la recta corta al eje Y en el valor 1, tal como se observa en la Figura 1.

La pendiente del mismo ejercicio puede ser obtenida a partir de la ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para ello elegimos cualquier par de puntos, por ejemplo: $P(1,3)$ y $P(2,5)$ y aplicamos la ecuación anterior:

$$m = \frac{5 - 3}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

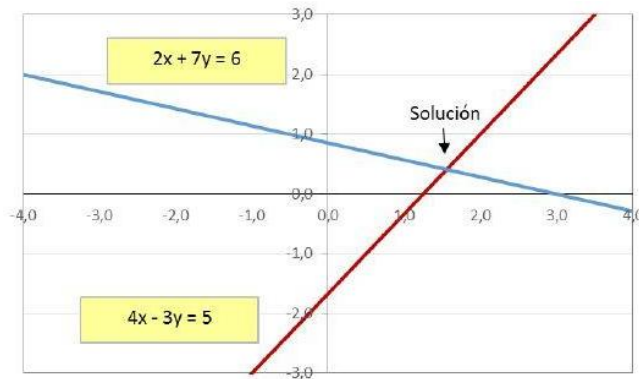


SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene la siguiente estructura:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 7y = 6 \end{cases}$$

Cada ecuación representa una recta en el plano. La **solución será el punto de corte de ambas rectas.**



La solución de un sistema de ecuaciones se puede hallar gráficamente o cuantitativamente.

Gráficamente consiste en graficar ambas rectas y ubicar el punto donde las mismas se cortan. Ese punto será la solución.

Cualitativamente existen tres métodos, de sustitución, de igualación y de reducción. En este curso veremos el **METODO DE SUSTITUCIÓN**:

Este método consiste en despejar una de las incógnitas de una de las dos ecuaciones y sustituir su valor en la otra ecuación. Una vez resuelta esta última, se resuelve la otra ecuación sustituyendo la incógnita por este valor.

Veamos un ejemplo:

Dado el siguiente sistema, hallar los valores de X e Y que son solución de los mismos:

$$\begin{cases} 4 + x = 2y \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

1. Aislamos una incógnita

Vamos a aislar la x de la primera ecuación. Como su coeficiente es 1, sólo tenemos que pasar el 4 restando al otro lado:

$$\begin{aligned} 4 + x &= 2y \rightarrow \\ x &= 2y - 4 \end{aligned}$$

Ya tenemos aislada la incógnita x.



Matemáticas

UNSL-FTU

Profesor Responsable: Ing. Marcelo Muñoz
Profesor Auxiliar: Ing. Verónica E. Escudero

2. Sustituimos la incógnita en la otra ecuación

Como tenemos que la incógnita $x = 2y - 4$, escribimos $2y - 4$ en lugar de la x en la segunda ecuación (sustituimos la x):

$$\begin{aligned}2x - y &= 1 && \rightarrow \\2 \cdot (2y - 4) - y &= 1 && \rightarrow \\4y - 8 - y &= 1\end{aligned}$$

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned}4y - 8 - y &= 1 && \rightarrow \\3y - 8 &= 1 && \rightarrow \\3y &= 9 && \rightarrow \\y &= \frac{9}{3} = 3\end{aligned}$$

Ya sabemos una incógnita: $y=3$.

4. Calculamos la otra incógnita sustituyendo:

Como conocemos que $y=3$, sustituimos en la ecuación $x = 2y - 4$ el valor de y para encontrar el valor de x :

$$\begin{aligned}x &= 2y - 4 && \rightarrow \\x &= 2 \cdot 3 - 4 && \rightarrow \\x &= 6 - 4 = 2\end{aligned}$$

Por tanto, la otra incógnita es $x=2$.

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

RESOLVER

Ejercicio 1:

Graficar las siguientes rectas y dar por lo menos 4 soluciones (puntos) para cada una (o sea que la tabla debe tener al menos 4 valores de x y 4 valores de y)

- a) $3x + y = 3$
- b) $-2x + 3y = -2$
- c) $x + y = 3$

Ejercicio 2:

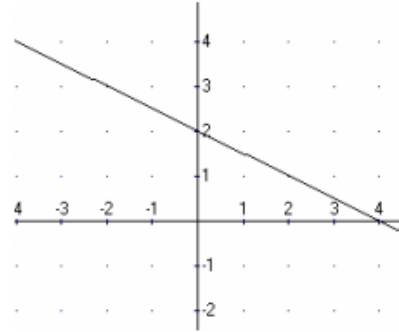
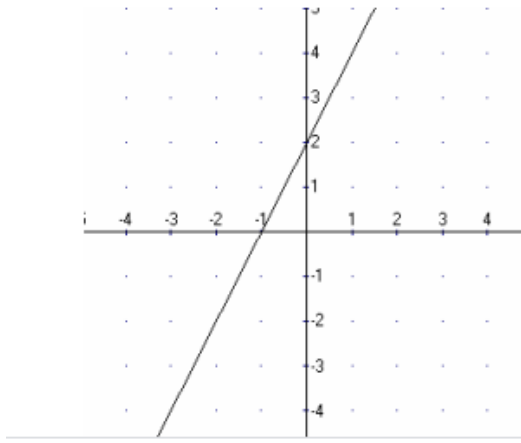


Matemáticas

UNSL-FTU

Profesor Responsable: Ing. Marcelo Muñoz
Profesor Auxiliar: Ing. Verónica E. Escudero

Teniendo en cuenta la expresión general de la recta, determinar la ecuación de los siguientes ejemplos



Ejercicio 3:

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de sustitución:

a)

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$