# FUNCIONES

## INTRODUCCIÓN

En nuestra vida diaria, continuamente surgen situaciones en las cuales dos o más *cantidades* se relacionan entre sí mediante *alguna regla o patrón*. Es ahí donde, sin darnos cuenta, están presentes las matemáticas, y lo más sorprendente es que aún sin conocerlas formalmente... ¡las estamos utilizando!

Reconocer que en determinada situación está presente una función y poder establecer un modelo matemático que la represente es de gran utilidad ya que con una fórmula podemos realizar un análisis de la situación y hacer predicciones.



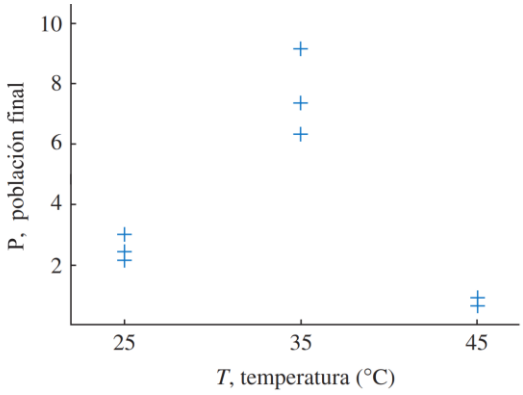
¿Por qué funciones? ¿Qué queremos hacer? La mayoría de los eventos, situaciones o problemas que estudiamos involucran relaciones entre dos o más datos, por ejemplo, personas y grupo sanguíneo o edad, ser vivo y número de patas, `lo que se nos ocurra`. La idea de función es ordenar un poco el caos para analizar su comportamiento pasado y actual, y poder predecir su futuro.

## DESCRIPCIÓN DE LAS RELACIONES ENTRE MEDIDAS CON FUNCIONES

Los números describen medidas, y las **funciones** describen **relaciones** entre medidas. Por ejemplo, el crecimiento de una población de bacterias relaciona dos medidas, denotadas por las variables $t$ y $b$. En general, una **relación** entre dos variables es el conjunto de todos los pares de valores posibles.

**Ejemplo 1**: Una relación entre la temperatura y el tamaño de la población. Supongamos que medimos la temperatura $T$ y el tamaño de la población final $P$ para nueve poblaciones, con los siguientes resultados (Tabla y Figura siguientes). Estos valores podrían resultar de repetir el experimento del ejemplo 3 varias veces y medir la población en $t = 6$.

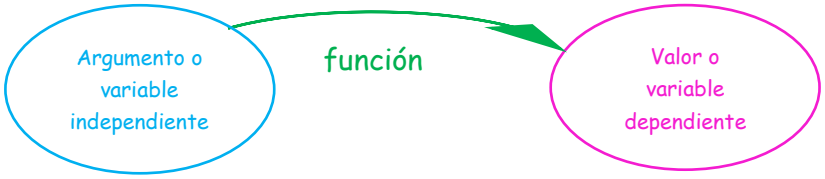
| $T$ | $P$ |
|---|---|
| 25 | 2,18 |
| 25 | 2,45 |
| 25 | 2,10 |
| 25 | 3,03 |
| 35 | 9,21 |
| 35 | 7,39 |
| 35 | 6,36 |
| 45 | 0,66 |
| 45 | 0,93 |




Tamaños de la población final en tres temperaturas

Los diferentes valores de la población P están relacionados con cada temperatura, quizás debido a diferencias en las condiciones experimentales. ■

Una **función** describe un tipo de relación específico e importante. Una función es un objeto matemático que toma algo (como un número) como entrada, realiza una operación en él y devuelve un nuevo objeto (como otro número). La entrada se llama **argumento** (o la variable independiente) y la salida se llama **valor** (o la variable dependiente) (Figura siguiente). El conjunto de todas las cosas posibles que una función puede aceptar como entradas se denomina **dominio**; el conjunto de todas las cosas que la función devuelve como salidas se llama **rango**.



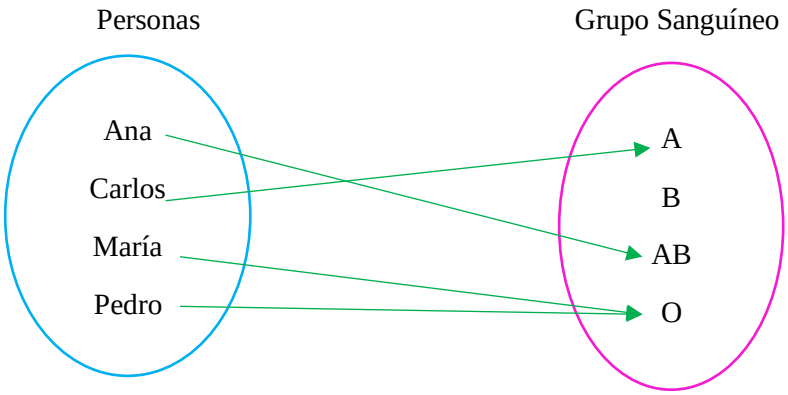
De nuevo: En nuestra vida diaria encontramos una infinidad de situaciones en las que identificamos una relación entre dos cantidades que dependen una de la otra; sin embargo, NO toda relación entre dos cantidades es una función (desde un punto de vista matemático), hay una condición que se debe cumplir; veamos en la siguiente definición de función cuál es esa condición.

Decimos que la cantidad $y$ está en ***función*** de la cantidad $x$, si se cumple que cada valor de $x$ se relaciona con un ÚNICO valor de $y$.
A la cantidad $y$ se le llama valor o variable dependiente y a la cantidad $x$ se le llama argumento o variable independiente.
La forma de denotar esta relación funcional es: $y = f(x)$, que se lee como "$y$ está en función de $x$"o "$y$ depende de $x$".

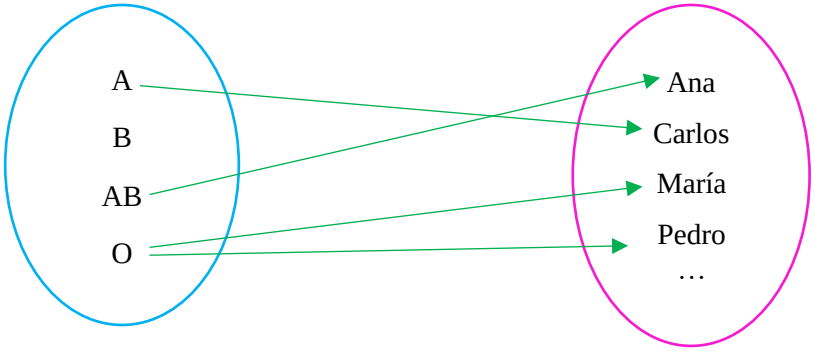


Analicemos un poco lo que nos dijeron: Lo que diferencia a la función de una relación, es que la función no permite respuestas ambiguas. ¿Y eso? ¿Qué quiere decir? Veamos…

**Ejemplo 2**: Cada persona tiene un único grupo sanguíneo




De cada persona "sale" una única flechita. Veamos al revés…




Ahora, del grupo sanguíneo O, salen *dos* flechitas, es decir **NO** obtengo una única respuesta.

Conclusión, la primer relación es función, y la segunda no.

Como ya dijimos: Al hablar de las funciones necesitamos dos conceptos: dominio y rango.

Dominio está formado por los datos que podemos utilizar. Veamos, si queremos relacionar cada persona con su grupo sanguíneo, nuestro dominio debe ser PERSONAS, no puedo considerar una hormiga.

Rango está formado por las respuestas que obtenemos, en el ejemplo 5 el rango serán grupos sanguíneos: A, B, O y AB, no puedo tener la respuesta $H_2O$.

Formalmente: El dominio y el rango de una función son conceptos relacionados con sus variables:

Dominio: Es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente.
Rango o imagen: Es el conjunto de valores correspondientes a la variable dependiente.

Cuando la variable representa algo real, por ejemplo: temperatura, tiempo, edad, altura, masa, etcétera, el conjunto de valores del dominio y del rango deben ser valores razonables, de acuerdo con lo que la variable representa.



## Cuatro maneras de representar una función

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

**A.** El área $A$ de un círculo depende de su radio $r$. La regla que relaciona $A$ con $r$ está dada por la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo $r$ hay asociado un valor de $A$, por lo que decimos que $A$ es una *función* de $r$.

**B.** La población humana del mundo $P$ depende del tiempo $t$. La tabla muestra las estimaciones de la población mundial $P(t)$ en el tiempo $t$, para algunos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Pero para cada valor del tiempo $t$ hay un valor correspondiente de $P$, por lo que decimos que $P$ es una *función* de $t$.

| Año | Población (millones) |
|---|---|
| 1900 | 1 650 |
| 1910 | 1 750 |
| 1920 | 1 860 |
| 1930 | 2 070 |
| 1940 | 2 300 |
| 1950 | 2 560 |
| 1960 | 3 040 |
| 1970 | 3 710 |
| 1980 | 4 450 |
| 1990 | 5 280 |
| 2000 | 6 080 |
| 2010 | 6 870 |

**C.** El costo $C$ de envío de un paquete por correo depende de su peso $w$. Aunque no hay alguna fórmula simple que relacione a $w$ con $C$, la oficina de correos tiene una regla para determinar $C$ cuando se conoce $w$.

**D.** La Figura 1 muestra un gráfico llamado electrocardiograma (ECG), uno de los 12 producidos por un electrocardiógrafo. Mide el potencial eléctrico $V$ (medido en milivoltios) en función del tiempo en una determinada dirección (hacia el electrodo positivo de un cable) correspondiente a una parte particular del corazón. Para un valor dado del tiempo $t$, el gráfico proporciona un valor correspondiente de $V$.

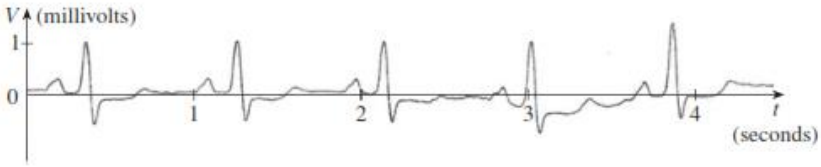



**FIGURE 1**
Electrocardiogram
*Source:* Courtesy of Dr. Brian Gilbert

Cada uno de estos ejemplos describe una regla según la cual, a un número dado ($r$, $t$, $w$ o $t$), se le asigna otro número ($A$, $P$, $C$, o $V$). En cada caso decimos que el segundo número es una función del primero.

El método más común para la visualización de una función es con su gráfica. Si $f$ es una función con dominio $D$, entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que estos son pares de entrada-salida). En otras palabras, la gráfica de $f$ consta de todos los puntos $(x, y)$ en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y $x$ está en el dominio de $f$.

La gráfica de una función $f$ nos da una imagen visual útil del comportamiento o "historia de vida" de una función. Dado que la coordenada $y$ de cualquier punto $(x, y)$ en el gráfico es $y = f(x)$, podemos leer el

valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica por encima del punto $x$ (véase la figura 4). La gráfica de $f$ permite también tener una imagen visual del dominio de $f$ en el eje $x$ y su rango en el eje $y$ como en la figura 5.

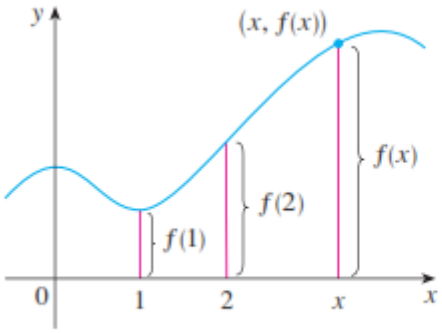



FIGURA 4

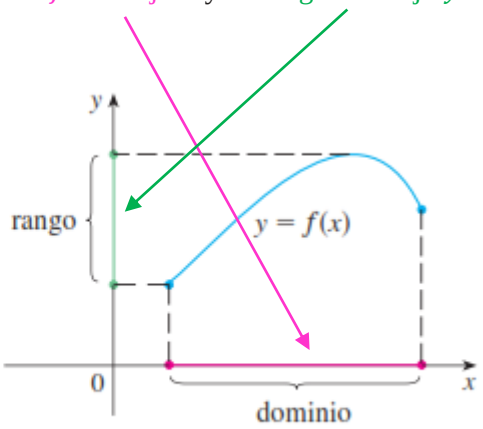



FIGURA 5



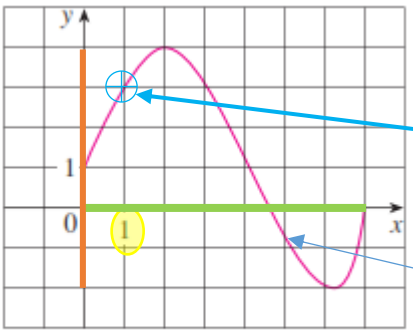



FIGURA 6

**Ejemplo 3**: La gráfica de una función $f$ se muestra en la figura 6.
a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.
b) ¿Cuál es el dominio y el rango de $f$?

*Solución:*

a) En la figura 6 vemos que el punto (1,3) está en la gráfica de *f*, por lo que el valor de $f$ en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto en la gráfica que se encuentra por encima de $x = 1$ está 3 unidades por encima del eje $x$.)
Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra aproximadamente a 0,7 unidades por debajo del eje $x$, así que estimamos que $f(5) = -0{,}7$.

b) Vemos que $f(x)$ está definida cuando $0 \le x \le 7$, por lo que el **dominio** de $f$ es el intervalo $[0, 7]$. Observemos que $f$ toma todos los valores de $-2$ a 4, así que el **rango** de *f* es

$$\{y | -2 \le y \le 4\} = [-2, 4]$$

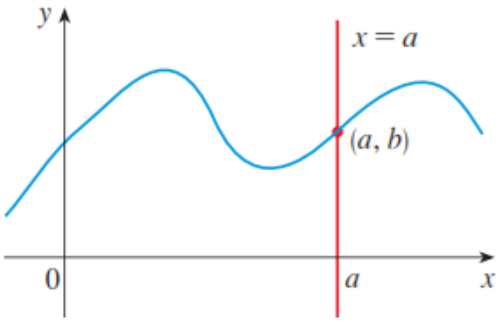
■

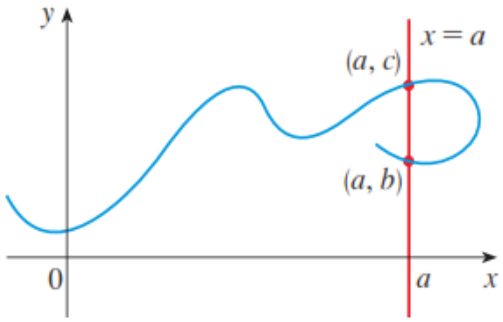
No todas las relaciones se describen por funciones. *Una función debe dar una salida única para una entrada determinada*. Las relaciones entre las medidas pueden ser más complicadas. La prueba de la línea vertical proporciona un método gráfico para reconocer relaciones que no pueden describirse mediante funciones.

La gráfica de una función es una curva en el plano $xy$. Pero surge la pregunta: ¿Qué curvas en el plano $xy$ son gráficas de funciones? Esto se responde mediante la siguiente prueba.

**La prueba o test de la línea vertical** Una curva en el plano $xy$ es la gráfica de una función de $x$ si y solo si ninguna línea vertical cruza la curva más de una vez.

¿Qué me dice este test? Observemos las siguientes figuras. Si cada recta vertical $x = a$ interseca una curva solo una vez, en $(a, b)$, entonces nos queda definido exactamente un valor de la función, $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ interseca la curva dos veces, en $(a, b)$ y $(a, c)$, entonces la curva no puede representar una función porque una función **no** puede asignar dos valores diferentes a $a$.






## Notación de funciones

Cuando las funciones están dadas por ecuaciones que contienen variables dependientes e independientes. Por ejemplo, la ecuación

$$x + 2y = 1$$ ecuación en forma implícita

define $y$, la variable dependiente, como función de $x$, la variable independiente. Para **evaluar** esta función (esto es, para encontrar el valor de $y$ correspondiente a un valor de $x$ dado) resulta conveniente despejar $y$.

$$y = \frac{1 - x}{2}$$ ecuación en forma explícita

Utilizando $f$ como nombre de la función, esta ecuación puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1 - x}{2}$$ en notación de función

El símbolo se lee como "$f$ de $x$" y denota el valor de la variable dependiente. Por ejemplo, el valor de $f$ cuando $x = 3$ es

$$f(3) = \frac{1 - (3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

El valor $f(3)$ se llama *valor* de función, y se encuentra en el rango de $f$. Esto significa que el punto $(3, f(3))$ se encuentra en la gráfica de $f$. La ventaja de la notación de funciones es que te permite identificar la variable dependiente como $f(x)$, informando al mismo tiempo que la variable independiente es $x$ y que la función se denota por "$f$". La notación de funciones permite ahorrar palabras. En lugar de preguntar "¿cuál es el valor de $y$ cuándo $x = 3$?" se puede preguntar "¿cuánto vale $f(3)$?"

En una ecuación que define a una función, el papel de la variable $x$ es simplemente el de un hueco a llenar. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

Puede escribirse como

$$f(\square) = 2(\square)^2 - 4(\square) + 1$$

donde se usan paréntesis en lugar de $x$. Para evaluar $f(-2)$, basta con colocar $-2$ dentro de cada paréntesis.

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 1$$ sustituir x por -2

$$= 2(4) + 8 + 1$$ simplificar

$$= 17$$ simplificar

NOTA Aunque es frecuente usar $f$ como símbolo adecuado para denotar una función y $x$ para la variable independiente, se pueden utilizar otros símbolos. Por ejemplo todas las ecuaciones siguientes definen la misma función.

$f(x) = x^2 + 7x - 4$ El nombre de la función es $f$, el de la variable independiente es $x$

$f(t) = t^2 + 7t - 4$ El nombre de la función es $f$, el de la variable independiente es $t$

$g(w) = w^2 + 7w - 4$ El nombre de la función es $g$, el de la variable independiente es $w$



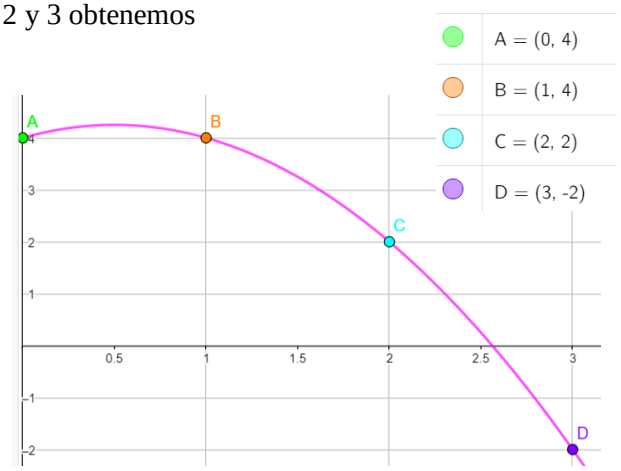
**Ejemplo 4**: Gráficas de funciones desde su fórmula. Para graficar una función desde una fórmula, es más fácil comenzar por insertar algunos valores representativos en el argumento. Supongamos que queremos graficar la función $f(x) = 4 + x - x^2$ para $x \geq 0$ (esta es una forma de restringir el dominio a los números positivos y el cero). Si evaluamos la función en los argumentos 0, 1, 2 y 3 obtenemos

$$f(0) = 4 + 0 - 0^2 = 4$$
$$f(1) = 4 + 1 - 1^2 = 4$$
$$f(2) = 4 + 2 - 2^2 = 2$$
$$f(3) = 4 + 3 - 3^2 = -2$$

Ubicamos los cuatro pares ordenados en el plano cartesiano

$$(0,4) \quad (1,4) \quad (2,2) \quad (3,-2)$$

y los unimos con una curva suave.




Ejemplo 5: Trace la gráfica y encuentre el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $g(x) = x^2$ c) $y = \sqrt{x-1}$

*Solución:*

a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$ y representa la ecuación de una recta con pendiente 2 e intersección con el eje $y$ en $y = 1$ (recuerde que la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta es $y = mx + b$). Esto nos permite dibujar la porción de la gráfica de $f$ en la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, así que el dominio de $f$ es el conjunto de todos los números reales. La gráfica muestra que el rango también es $\mathbb{R}$.

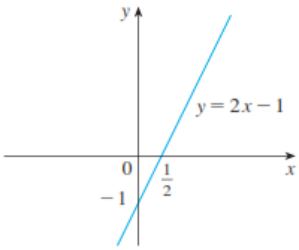



FIGURA 7

b) Dado que $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podemos ubicar los puntos $(2,4)$ y $(-1,1)$ junto con algunos otros puntos de la gráfica, y después unirlos para obtener la gráfica (figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$ y representa una parábola. El dominio de $g$ es $\mathbb{R}$, y el rango consiste en todos los valores de $g(x)$, esto es, todos los números de la forma $x^2$. Pero $x^2 \geq 0$ para todos los números $x$, y todo número $y$ en estas condiciones es positivo, así que el rango de $g$ es $\{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$. Esto puede verse en la figura 8.

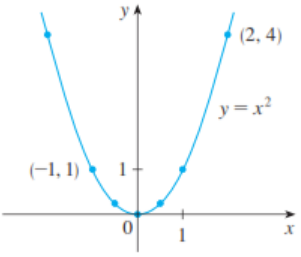
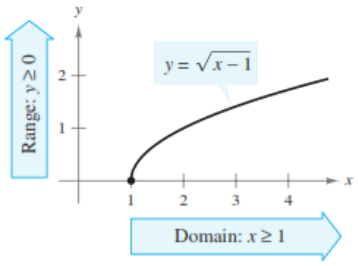


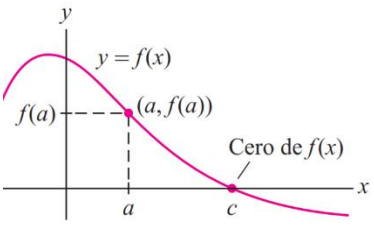

FIGURA 8

c) Como $\sqrt{x-1}$ no esta definida para $x-1<0$ (esto es $x<1$), el dominio de la función es el intervalo $x \geq 1$ o $[1,\infty)$. Para encontrar el rango, observe que $\sqrt{x-1}$ nunca es negativo. Además, a medida que $x$ toma los diversos valores en el dominio, $y$ toma todos los valores no negativos. Entonces, el rango es el intervalo $y \geq 0$ o $[0,\infty)$. El gráfico de la función, que se muestra en la Figura 8 c), confirma estos resultados.






Un **cero** o **raíz** de una función $f$, es un número $c$ tal que $f(c)=0$. Los ceros son los valores de $x$ para los que la gráfica corta el eje $x$.



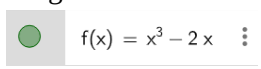

Ejemplo 6: Encontrar las raíces y representar graficamente la función $f(x)=x^3-2x$.

*Solución:* Primero resolvemos la ecuación

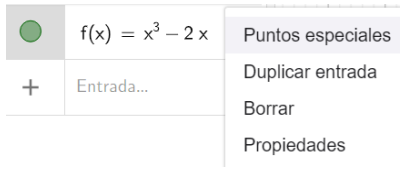
$$x^3-2x=x(x^2-2)=0$$

Las raíces de $f(x)$ son $x=0$ y $x=\pm\sqrt{2}$. Para dibujar la gráfica, vamos a geogebra:

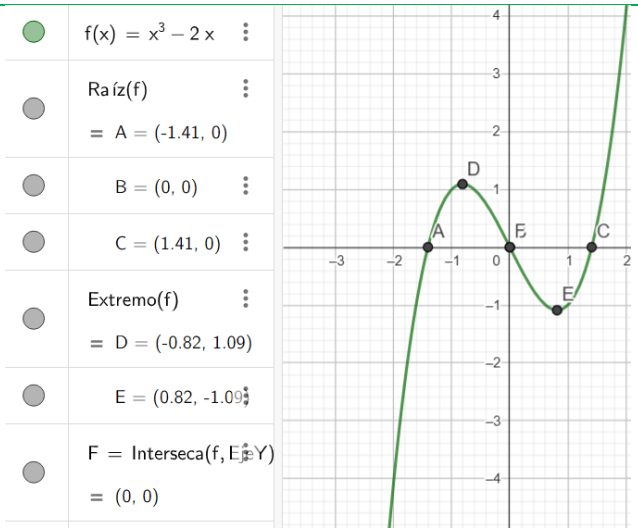
Cargamos la función en geogebra



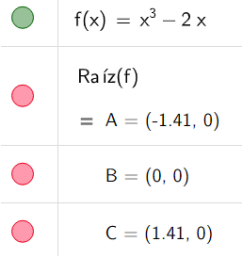

vamos a los tres puntitos, elegimos "puntos especiales"

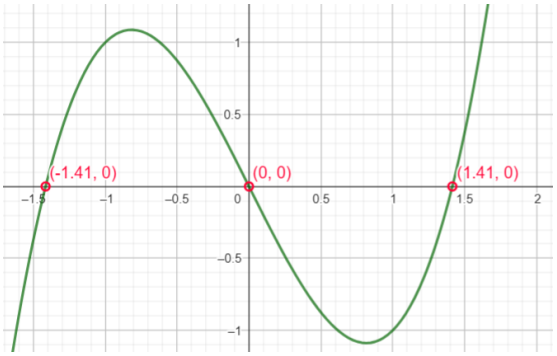



El geogebra nos muestra



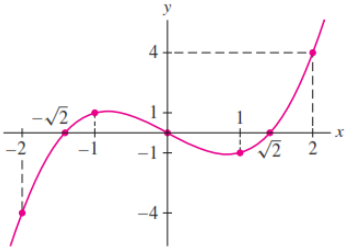

Nos quedamos con las raíces




Si miramos el libro

| $x$ | $x^3-2x$ |
|---|---|
| −2 | −4 |
| −1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | −1 |
| 2 | 4 |

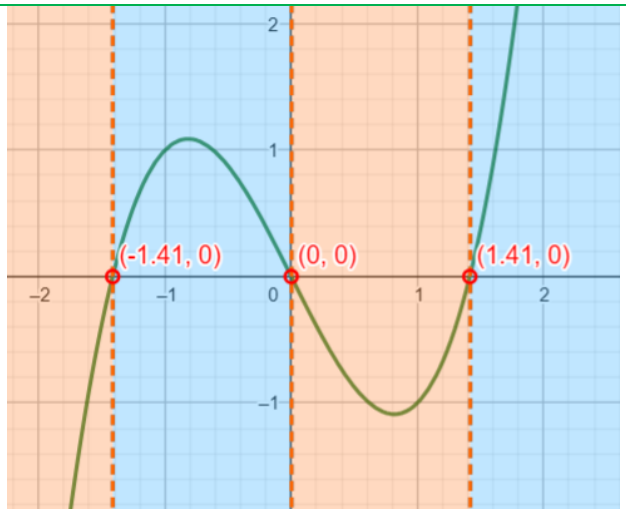


Los ceros nos ayudan a encontrar los conjuntos donde nuestra **función es positiva** (su gráfico está por encima del eje $x$) y donde es **negativa** (la gráfica está por debajo del eje $x$)

Ejemplo 7: Pedimos en geogebra
$f > 0$ y $f < 0$

a : $f(x) > 0$
$= x^3 - 2x > 0$

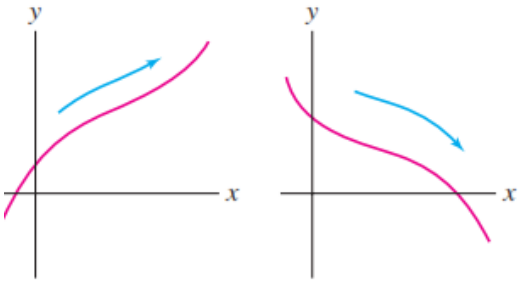
b : $f(x) < 0$
$= x^3 - 2x < 0$




Como vemos en la imagen
$f > 0$ en los intervalos $(-1{,}41; 0) \cup (1{,}41; \infty)$
$f < 0$ en los intervalos $(-\infty; -1{,}41) \cup (0; 1{,}41)$



Es relevante saber determinar si una función es **creciente** o **decreciente**. De manera informal decimos que una función $f$ es **creciente** si su gráfica asciende al desplazarnos de izquierda a derecha (en el sentido en que escribimos), y es **decreciente** si desciende cuando nos desplazamos de izquierda a derecha.




(A) Increasing (B) Decreasing

## EXPLORACIÓN: Información creciente, decreciente y constante

**1.** De las tres tablas de datos numéricos siguientes, ¿cuál sería modelada mediante una función que sea a) creciente, b) decreciente, c) constante?

| $x$ | $y1$ |
|---|---|
| $-2$ | 12 |
| $-1$ | 12 |
| 0 | 12 |
| 1 | 12 |
| 3 | 12 |
| 7 | 12 |

| $x$ | $y2$ |
|---|---|
| $-2$ | 3 |
| $-1$ | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | $-2$ |
| 3 | $-6$ |
| 7 | $-12$ |

| $x$ | $y3$ |
|---|---|
| $-2$ | $-5$ |
| $-1$ | $-3$ |
| 0 | $-1$ |
| 1 | 1 |
| 3 | 4 |
| 7 | 10 |

**2.** Haga una lista de $\Delta y1$, el *cambio* en los valores de $y1$ cuando se mueve hacia abajo de la lista. Conforme se mueve de $y1 = a$ a $y1 = b$, el cambio es $\Delta y1 = b - a$. Haga lo mismo para los valores de $y2$ y $y3$.

| $x$ se mueve de | $\Delta x$ | $\Delta y1$ |
|---|---|---|
| $-2$ a $-1$ | 1 | |
| $-1$ a 1 | 1 | |
| 0 a 1 | 1 | |
| 1 a 3 | 2 | |
| 3 a 7 | 4 | |

| $x$ se mueve de | $\Delta x$ | $\Delta y2$ |
|---|---|---|
| $-2$ a $-1$ | 1 | |
| $-1$ a 1 | 1 | |
| 0 a 1 | 1 | |
| 1 a 3 | 2 | |
| 3 a 7 | 4 | |

| $x$ se mueve de | $\Delta x$ | $\Delta y3$ |
|---|---|---|
| $-2$ a $-1$ | 1 | |
| $-1$ a 1 | 1 | |
| 0 a 1 | 1 | |
| 1 a 3 | 2 | |
| 3 a 7 | 4 | |

**3.** ¿Qué se cumple acerca de los cocientes $\Delta y/\Delta x$ para una función creciente? ¿Para una función decreciente? ¿Para una función constante?
**4.** ¿En qué otro sitio ha visto el cociente $\Delta y/\Delta x$? ¿Esto refuerza su respuesta de la parte 3?

El análisis de los cocientes $\Delta y/\Delta x$ en la exploración nos debería ayudar a entender la definición siguiente.

**DEFINICIÓN Función creciente, decreciente y constante en un intervalo**

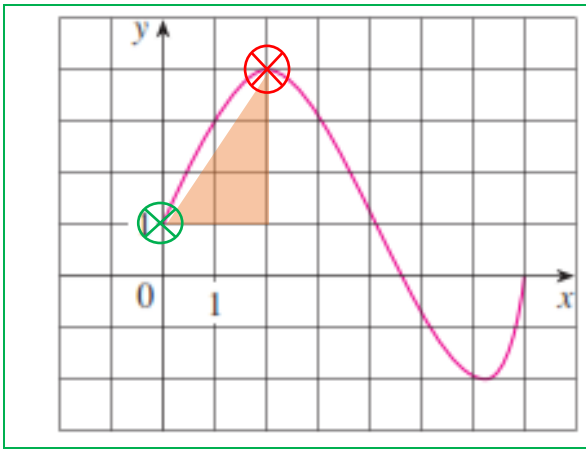
Una función *f* es **creciente** en un intervalo si, para dos puntos cualesquiera en el intervalo, un cambio positivo en *x* ocasiona un cambio positivo en *f* (*x*).
Una función *f* es **decreciente** en un intervalo si, para dos puntos cualesquiera en el intervalo, un cambio positivo en *x* ocasiona un cambio negativo en *f* (*x*).
Una función *f* es **constante** en un intervalo si, para dos puntos cualesquiera en el intervalo, un cambio positivo en *x* ocasiona un cambio nulo en *f* (*x*).



RAZON DE CAMBIO

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{del\ x\ derecha} - y_{\ del\ x\ izquierda}}{x_{dercha} - x_{izquierda}}$$

Ejemplo 8:

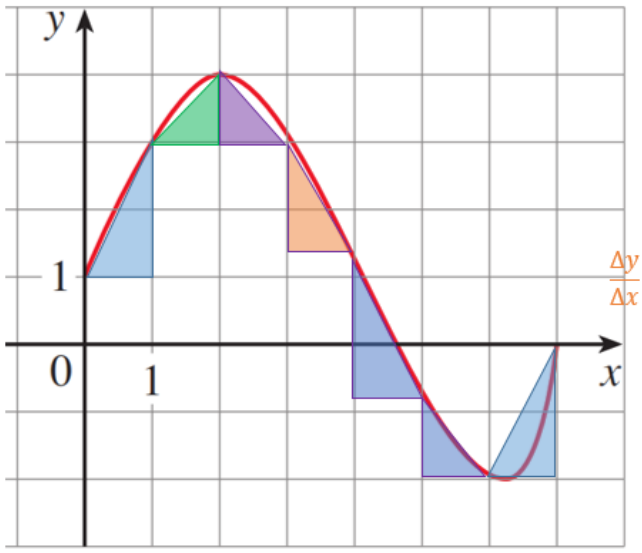



$izquierda\ (0,1)$ $derecha\ (2,4)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{del\ x\ derecha} - y_{del\ x\ izquierda}}{x_{dercha} - x_{izquierda}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-0}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2}$$




$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{1-0} = 2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{2-1} = 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-3}{3-2} = -1$$

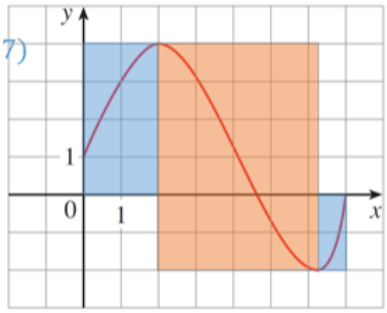
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}5-3}{4-3} = -1{,}5$$

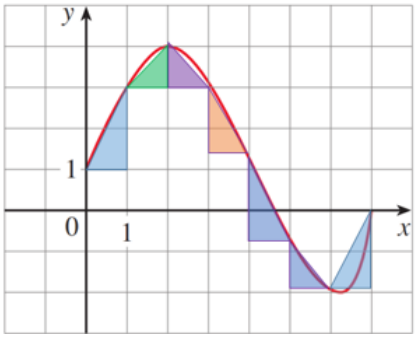
| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |
| 3 | 3 |
| 4 | 1,5 |
| 5 | -0,7 |
| 6 | -1,9 |
| 7 | 0 |

| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ |
|---|
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{1-0} = 2$ |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{2-1} = 1$ |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-3}{3-2} = -1$ |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}5-3}{4-3} = -1{,}5$ |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0{,}7-1{,}5}{5-4} = -2{,}2$ |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1{,}9+0{,}7}{6-5} = -1{,}2$ |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0+1{,}9}{7-6} = 1{,}9$ |

Creciente
(0,2) U (6,3; 7)

Decreciente
(2; 6,3)



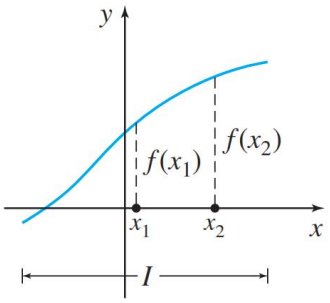




| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | SIGNO | |
|---|---|---|
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{1-0} = 2$ | + | CRECIENTE |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{2-1} = 1$ | + | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-3}{3-2} = -1$ | − | DECRECIENTE |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1,5-3}{4-3} = -1,5$ | − | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0,7-1,5}{5-4} = -2,2$ | − | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1,9+0,7}{6-5} = -1,2$ | − | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0+1,9}{7-6} = 1,9$ | + | CRECIENTE |

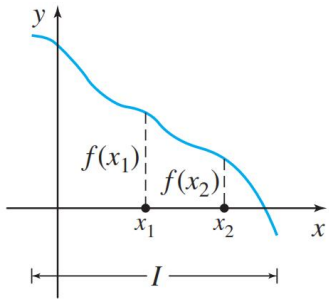
Otra forma de definirlo es

**FUNCIONES CRECIENTES/DECRECIENTES** Supongamos que $y = f(x)$ es una función definida en un intervalo, y que $x_1$ y $x_2$ son dos números cualesquiera en el intervalo, tales que $x_1 < x_2$. Entonces, la función $f$ es

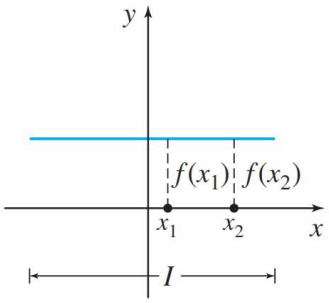
- **creciente** en el intervalo, si $f(x_1) < f(x_2)$.
- **decreciente** en el intervalo, si $f(x_1) > f(x_2)$.




(a) Para $x_1 < x_2$ en $I$, $f(x_1) < f(x_2)$; $f$ es creciente en $I$



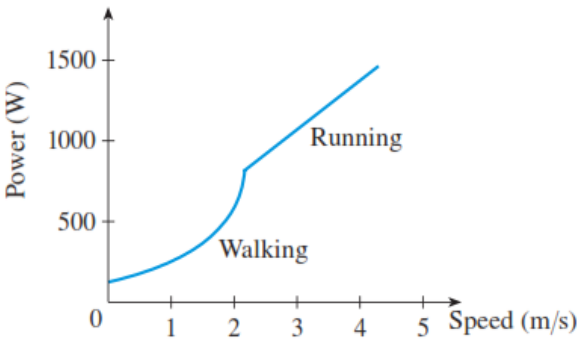

(b) Para $x_1 < x_2$ en $I$, $f(x_1) > f(x_2)$; $f$ es decreciente en $I$




(c) Para todo $x$ en $I$, los valores de $f$ son iguales; $f$ es constante en $I$

## FUNCIONES DEFINIDAS POR PARTES O A TROZOS

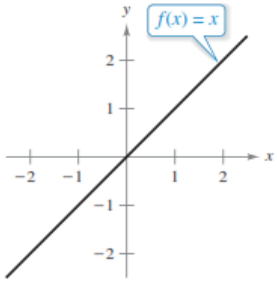
Ejemplo 9: Energía metabólica al caminar y correr: Supongamos que caminamos lentamente, pero luego aumentamos el ritmo y comenzamos a correr cada vez más rápido para tomar un colectivo. Cuando empezamos a correr, la forma de andar (forma de movimiento) cambia. La Figura siguiente muestra un gráfico de la energía metabólica consumida por las personas que caminan y corren (calculada a partir de las mediciones del



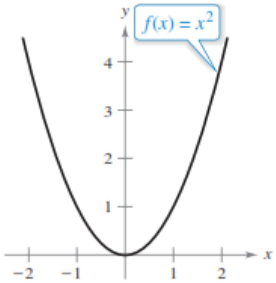
consumo de oxígeno) en función de la velocidad. Observemos que es una función definida por partes y la segunda parte comienza cuando comienza a correr.

## BIBLIOTECA DE FUNCIONES

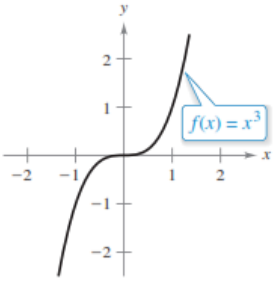
En la siguiente figura se muestran las gráficas de funciones básicas, las cuales estudiaremos en las guías siguientes:



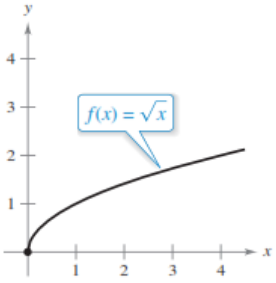
Función identidad



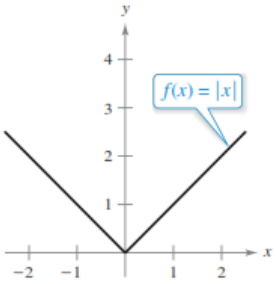
Función cuadrática



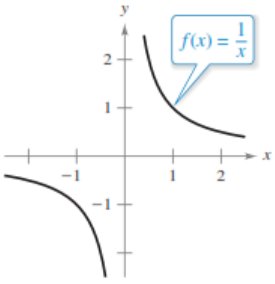
Función cúbica



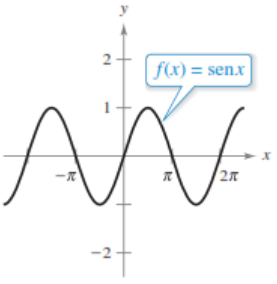
Función raíz cuadrada



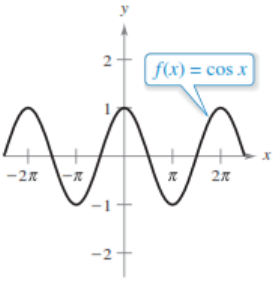
Función valor absoluto



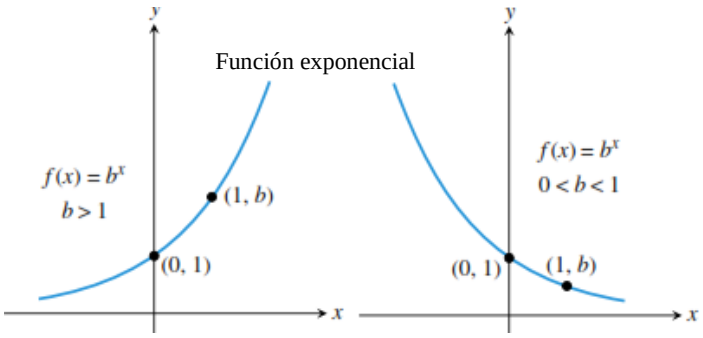
Función racional

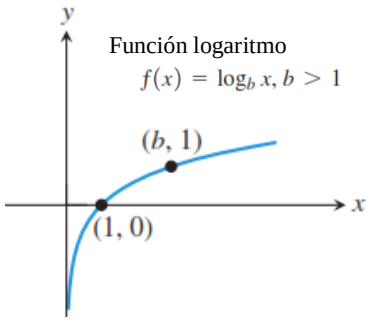


Función seno



Función coseno




## COMBINACIÓN DE FUNCIONES

Las matemáticas simplifican los problemas complicados al construir estructuras complejas a partir de piezas simples. Al comprender cada una de las piezas simples y las reglas para combinarlas, se puede analizar y entender una gran variedad de relaciones complejas. Las formas más importantes de combinar funciones son la suma, el producto y la composición.

**Adición de funciones** La altura de la gráfica de la suma de dos funciones es la altura de la primera más la altura de la segunda. Geométricamente, podemos graficar cada una de las piezas y sumarlas de la misma manera. Algebraicamente, el valor de la función $f + g$ se calcula como la suma de los valores de las funciones $f$ y $g$. Formalmente:

La suma $f + g$ de las funciones $f$ y $g$ es la función que toma el valor

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

**Multiplicación de funciones** El valor del producto $f \cdot g$ se calcula como el producto de los valores de las funciones $f$ y $g$. Formalmente

El producto $f \cdot g$ de las funciones $f$ y $g$ es la función que toma el valor

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Utilizamos el punto $\cdot$ para indicar multiplicacion en lugar de $\times$ para evitar la confusión con la variable $x$.



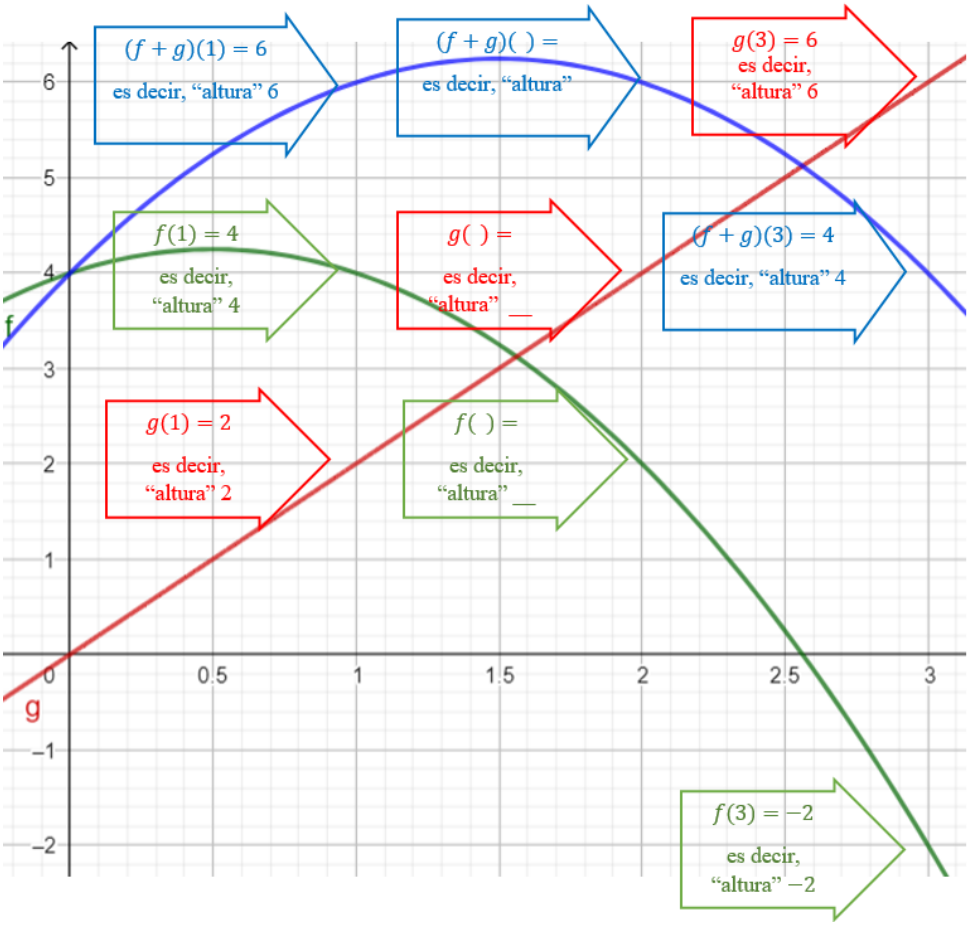
Ejemplo 10: Adición y multiplicación de funciones. Consideremos las funciones $f(x)$ y $g(x)$ con fórmulas

$$f(x) = 4 + x - x^2 \qquad g(x) = 2x$$

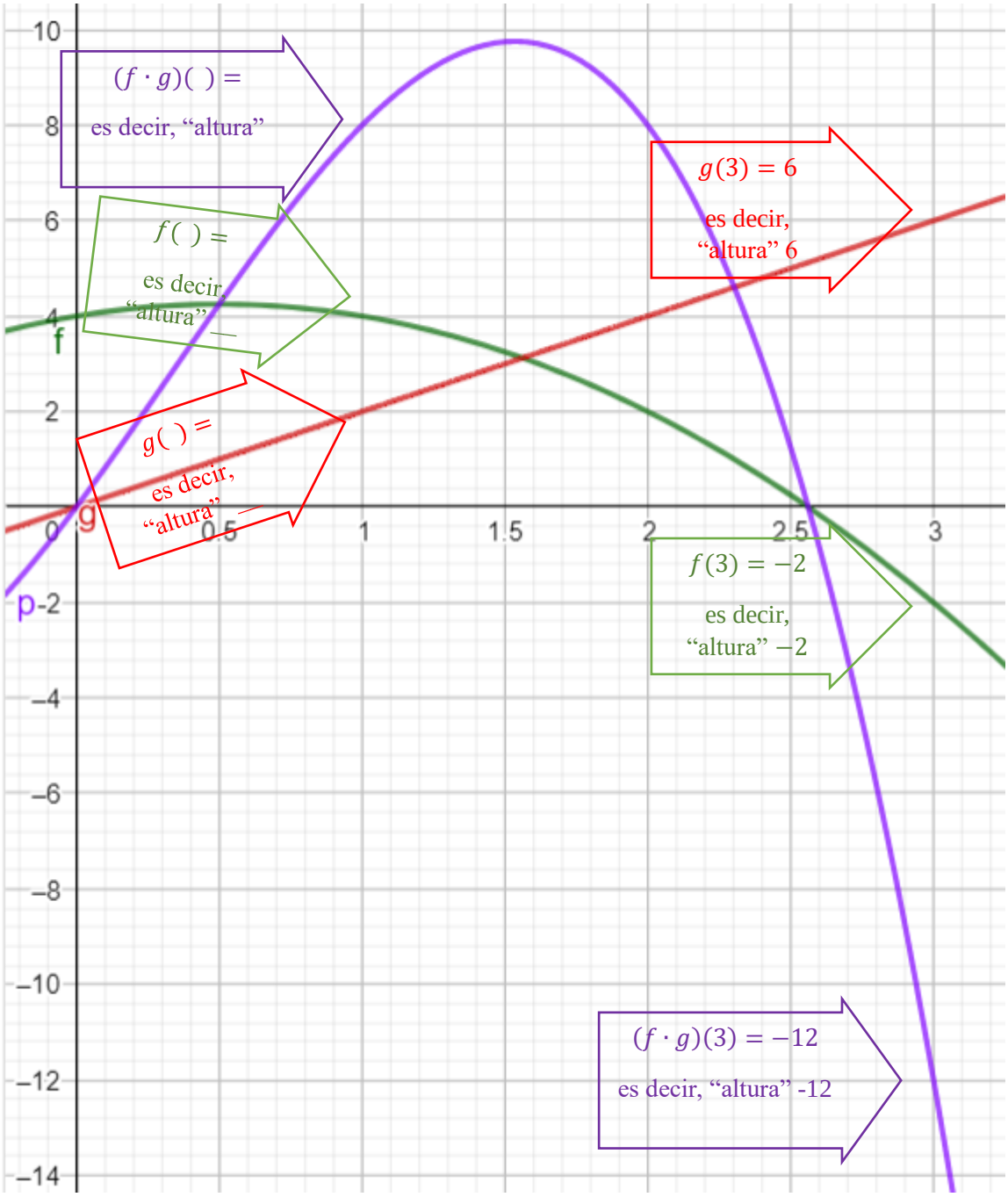
Confeccionemos una tabla con los valores que toman las funciones $f$, $g$, $f+g$ y $f \cdot g$, para varios argumentos

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $(f+g)(x)$ | $(f \cdot g)(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 0 | $4+0=4$ | $4 \cdot 0 = 0$ |
| 0,5 | 4,25 | 1 | $4,25+1=5,25$ | $4,25 \cdot 1 = 4,25$ |
| 1 | 4 | 2 | $4+2=6$ | $4 \cdot 2 = 8$ |
| 1,5 | 3,25 | 3 | $3,25+3=6,25$ | $3,25 \cdot 3 = 9,75$ |
| 2 | 2 | 4 | $2+4=6$ | $2 \cdot 4 = 8$ |
| 2,5 | 0,25 | 5 | $0,25+5=5,25$ | $0,25 \cdot 5 = 1,25$ |
| 3 | $-2$ | 6 | $-2+6=4$ | $-2 \cdot 6 = -12$ |

Grafiquemos, prestemos atención a las coordenadas en los ejes. Primero la adición:



¿Puedes completar la información en las flechas incompletas?
Ahora vamos por el producto, también ¿Puedes completar la información en las flechas incompletas?




Ejemplo 11: Sumemos funciones biológicas: Si contamos por separado dos poblaciones de bacterias, la población total es la suma de las dos poblaciones individuales. Supongamos que una población creciente viene dada por la función

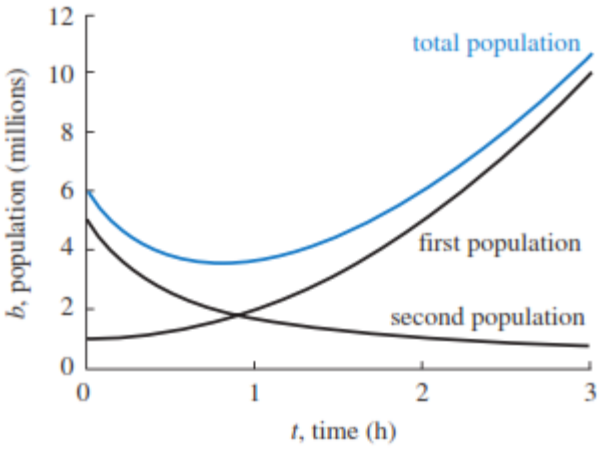
$$b_1(t) = t^2 + 1$$

y una población decreciente viene dada por la función

$$b_2(t) = \frac{5}{1 + 2t}$$

Los tamaños de las poblaciones individuales y su suma las mostramos en la siguiente tabla. Y trazamos las gráficas correspondientes.

| $t$ | $b_1(t)$ | $b_2(t)$ | $(b_1 + b_2)(t)$ |
|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.00 | 5.00 | 6.00 |
| 0.50 | 1.25 | 2.50 | 3.75 |
| 1.00 | 2.00 | 1.67 | 3.67 |
| 1.50 | 3.25 | 1.25 | 4.50 |
| 2.00 | 5.00 | 1.00 | 6.00 |
| 2.50 | 7.25 | 0.83 | 8.08 |
| 3.00 | 10.00 | 0.71 | 10.71 |






Ejemplo 12: Multipliquemos funciones biológicas: Muchas cantidades en la ciencia se construyen como producto de cantidades más simples. Por ejemplo, la masa de una población es el producto entre la masa de cada individuo y el número de individuos. Consideremos una población que crece según

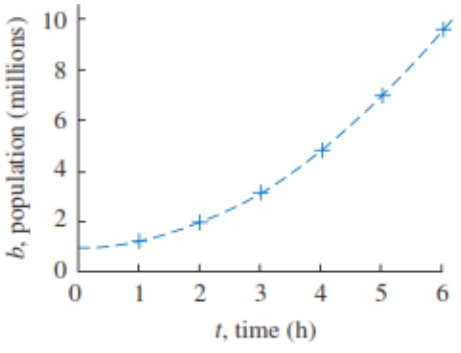
$$b(t) = \frac{t^2}{4{,}2} + 1$$

Y supongamos que a medida que aumenta la población, los individuos se vuelven más pequeños. Sea $\mu$ (la letra griega mu) la masa de un individuo en el tiempo $t$, y supongamos que

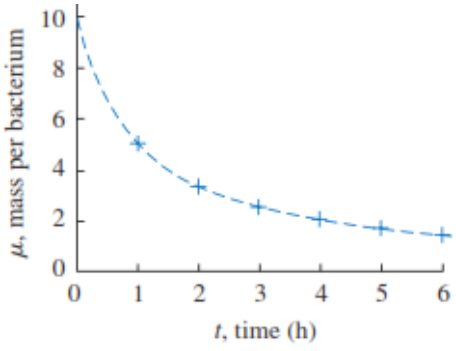
$$\mu(t) = \frac{1}{1+t}$$

Podemos encontrar la masa total multiplicando la masa individual por el número de individuos. Confeccionamos la tabla y los gráficos

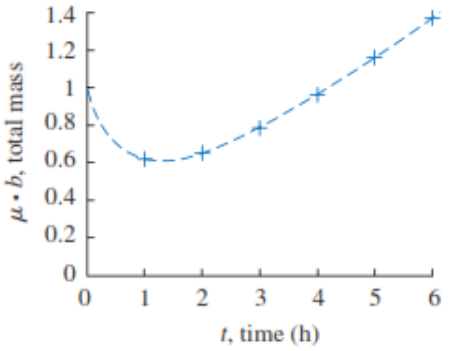
| $t$ | $b$ | $\mu$ | $\mu \cdot b$ |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 1.0 | 1.24 | 0.50 | 0.62 |
| 2.0 | 1.95 | 0.33 | 0.65 |
| 3.0 | 3.14 | 0.25 | 0.78 |
| 4.0 | 4.81 | 0.20 | 0.96 |
| 5.0 | 6.95 | 0.17 | 1.16 |
| 6.0 | 9.57 | 0.14 | 1.37 |




a




b




c

La masa total de esta población inicialmente decrece y entonces, después de alrededor de 2 horas, se incrementa. (NO puedo graficar todo en el mismo sistema de ejes porque estoy midiendo cosas distintas, observe las unidades de los ejes verticales).

Existe otra forma de combinar dos funciones para obtener una nueva función, veamos un ejemplo:

Ejemplo 13: Supongamos que conocemos que el peso $w$ de un joven entre los 6 y los 16 años depende de su altura de la siguiente forma ($w$ en libras y $h$ en pulgadas)

$$w = 4{,}4h - 150$$

También sabemos que la altura depende de la edad

$$h = 1{,}9t + 40$$

Entonces tenemos

$w = w(h)$ peso expresado en función de la altura

$h = h(t)$ altura expresada como una función de la edad

O sea podemos calcular la estatura de un chico de 11 años

$$h(11) = 1{,}9(11) + 40 = 60{,}9\ pulgadas = 154{,}7cm$$

y luego utilizarlo para encontrar su peso

$$w(60{,}9) = 4{,}4(60{,}9) - 150 = 117{,}96\ libras = 53{,}5\ kg$$

Una forma alternativa es encontrar una fórmula que me relacione peso-edad directamente

$$w(h) = w\big(h(t)\big) = w(t)$$

$$w(h) = 4{,}4h - 150 \underbrace{=}_{h=h(t)} 4{,}4(1{,}9t + 40) - 150$$

$4{,}4(1{,}9t + 40) - 150$

$= 4{,}4 \cdot 1{,}9t + 4{,}4 \cdot 40 - 150$

$= 8{,}36t + 176 - 50$

$= 8{,}36t + 26$

Es decir

$$w(t) = 8{,}36t + 26$$

Verifiquemos

$$w(11) = 8{,}36(11) + 26 = 117{,}96\ libras$$

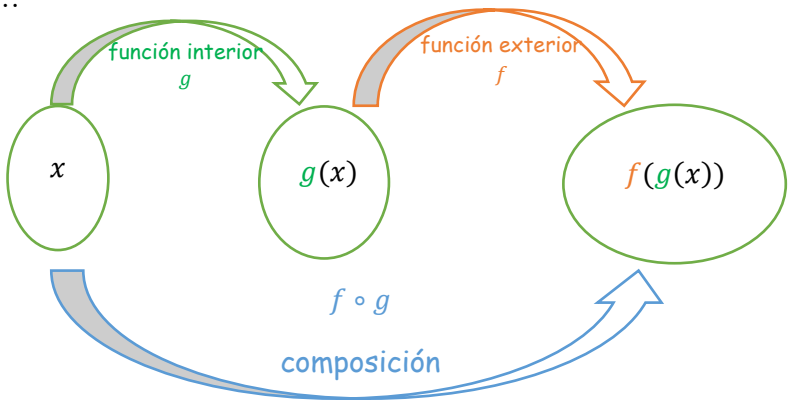
Lo que acabamos de utilizar para que nuestra función $w$ dependiera de la edad $t$, se llama composición.
La forma más importante de combinar funciones es a través de la composición, donde el resultado de una función actúa como argumento de otra.

La **composición** $f \circ g$ de las funciones $f$ y $g$ es una (nueva) función definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Se lee "$f$ de $g$ de $x$". La función $f$ se llama función exterior y la función $g$ se llama función interior.

Hacemos un grafiquito…



Ejemplo 14: Consideremos las funciones del ejemplo 12

$$f(x) = 4 + x - x^2 \qquad g(x) = 2x$$

Para encontrar el valor de la composición $f \circ g$ en $x = 2$, calculamos

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(2) &= f(g(2)) && \text{definición de composición} \\
&= f(2 \cdot 2) && \text{sustituimos 2 en g(x)} \\
&= f(4) && \text{evaluamos } g(2) = 4 \\
&= 4 + 4 - 4^2 && \text{sustituimos 4 en f(x)} \\
&= -8 && \text{evaluamos } f(4) = -8
\end{aligned}$$



Ejemplo 15: Ahora, encontremos el valor de la composición $g \circ f$ en $x = 2$, para las mismas funciones del ejemplo anterior.

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(2) &= g(f(2)) && \text{definición de composición} \\
&= g(4 + 2 - 2^2) && \text{sustituimos 2 en f(x)} \\
&= g(2) && \text{evaluamos } f(2) = 2 \\
&= 2 \cdot 2 && \text{sustituimos 2 en g(x)} \\
&= 4 && \text{evaluamos } g(2) = 4
\end{aligned}$$

Ejemplo 16: Calcular la fórmula de una composición de funciones

Consideremos las funciones del ejemplo 12

$$f(x) = 4 + x - x^2 \qquad g(x) = 2x$$

con dominios todos los reales. Para encontrar la composición $f \circ g$, reemplazamos la función interior $g$ en la fórmula de la función exterior $f$:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{la definición} \\
&= f(2x) && \text{escribimos la fórmula de la función interna g} \\
&= 4 + (2x) - (2x)^2 && \text{sustituimos la fórmula de g en la función externa f} \\
&= 4 + 2x - 4x^2 && \text{distribuimos el cuadrado}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 14 calculamos $(f \circ g)(2) = -8$. Si ahora utilizamos la fórmula $(f \circ g)(x) = 4 + 2x - 4x^2$, encontramos

$$(f \circ g)(2) = 4 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 = -8$$

resultado que coincide con el anterior.

Encontramos la composición $g \circ f$ con el mismo procedimiento

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{la definición} \\
&= g(4 + x - x^2) && \text{escribimos la fórmula de la función interna f} \\
&= 2(4 + x - x^2) && \text{sustituimos la fórmula de f en la función externa g} \\
&= 8 + 2x - 2x^2 && \text{distribuimos el 2}
\end{aligned}$$

El paso clave es sustituir fórmula de la función interna en la función externa; el resto es álgebra. En el ejemplo 15 calculamos $(g \circ f)(2) = 4$. Si ahora evaluamos sustituyendo el 2 en la fórmula

$$(g \circ f)(x) = 8 + 2x - 2x^2$$

obtenemos

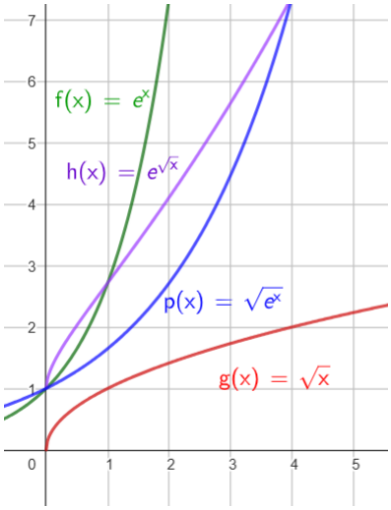
$$(g \circ f)(2) = 8 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 4$$

nuevamente coincide con el resultado anterior.



Estos ejemplos ilustran un punto importante sobre la composición de funciones: *la respuesta es generalmente diferente cuando las funciones se componen en un orden diferente*. Si $f \circ g = g \circ f$, decimos que las funciones *conmutan*. Cuando las dos composiciones no coinciden, decimos que no conmutan. Sin una buena razón, nunca asuma que dos funciones conmutan. Esterilizar el bisturí y luego hacer una incisión produce un resultado diferente de hacer una incisión y luego esterilizar el bisturí.

Ejemplo 17: Sean $f(x) = e^x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Determinar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$, y verificar que las funciones obtenidas no son iguales.

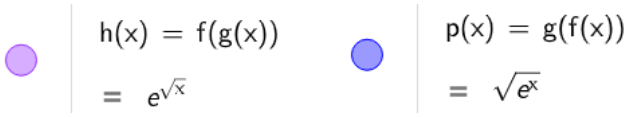



Solución

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x}\big) = e^{\sqrt{x}}$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(e^x) = \sqrt{e^x}$$

Vamos al geogebra




Ejemplo 18: Composiciones en biología: El número de bacterias suele medirse indirectamente, midiendo la densidad óptica del medio. El agua permite que entre menos luz a medida que aumenta la población. Supongamos que la densidad óptica $\rho$ (letra griega rho) es una función del tamaño de la población de bacterias $b$ con fórmula

$$\rho(b) = \frac{b}{2b + 5}$$

Entonces la densidad óptica como una función del tiempo es la composición entre las funciones $\rho(b)$ y $b(t)$.

Supongamos que la función que da el tamaño de la población tiene fórmula

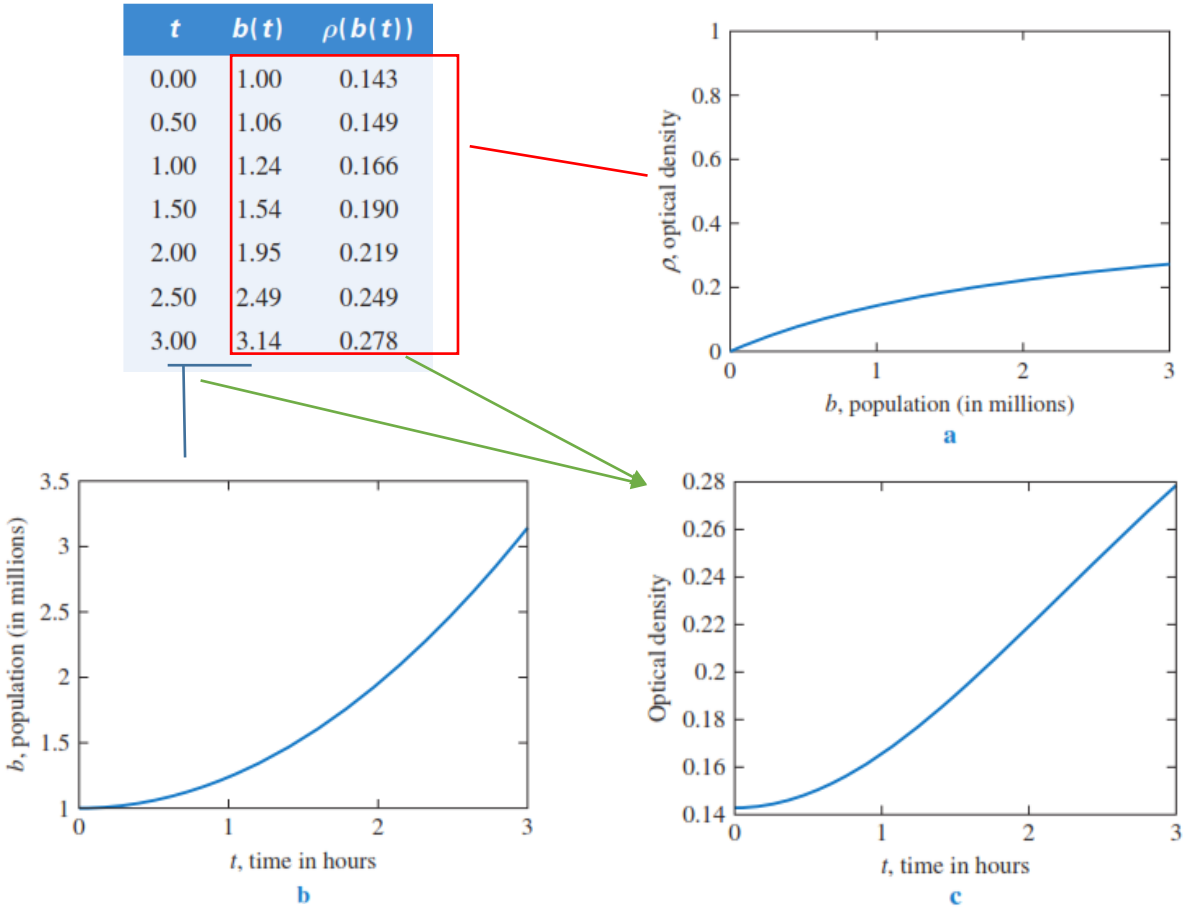
$$b(t) = \frac{t^2}{4{,}2} + 1$$

Entonces

$$\rho\big(b(t)\big) = \rho\left(\frac{t^2}{4{,}2} + 1\right) = \frac{\frac{t^2}{4{,}2} + 1}{2\left(\frac{t^2}{4{,}2} + 1\right) + 5}$$

con valores en la siguiente tabla. Y gráficas a continuación. (Cuidado con los ejes).

| $t$ | $b(t)$ | $\rho(b(t))$ |
|---|---|---|
| 0.00 | 1.00 | 0.143 |
| 0.50 | 1.06 | 0.149 |
| 1.00 | 1.24 | 0.166 |
| 1.50 | 1.54 | 0.190 |
| 2.00 | 1.95 | 0.219 |
| 2.50 | 2.49 | 0.249 |
| 3.00 | 3.14 | 0.278 |

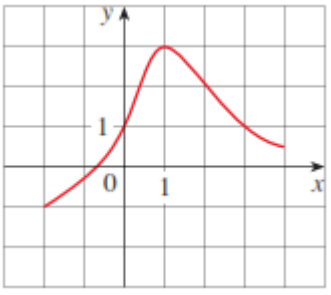



La composición $b \circ \rho$ no es solamente diferente a la composición $\rho \circ b$; además, no tiene sentido. La función $b$ acepta como entrada solamente el tiempo $t$, no la densidad óptica que es lo que devuelve la función $\rho$.

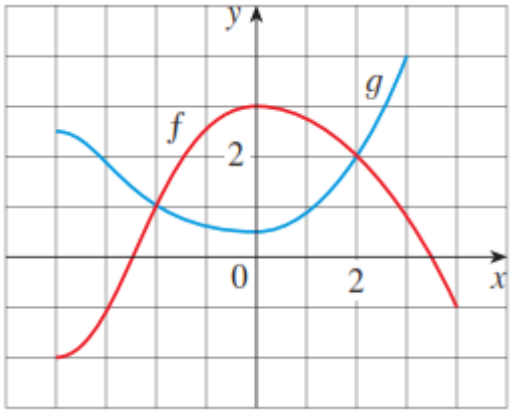
## A TRABAJAR Ejercicios

1) Calcular los valores de las funciones en los puntos indicados y trazar la gráfica de la función
   a) $f(x) = x + 5$ en $x = 0,\ x = 1,\ x = 4$
   b) $g(t) = 5t$ en $t = 0,\ t = 1,\ t = 4$
   c) $h(z) = \frac{1}{5z}$ en $z = 1,\ z = 2,\ z = 4$
   d) $F(r) = r^2 + 5$ en $r = 0,\ r = 1,\ r = 4$

2) Dada la gráfica de una función $f$,
   a) Indicar el valor de $f(1)$.
   b) Calcular el valor de $f(-1)$.
   c) ¿para qué valores de $x$, es $f(x) = 1$?
   d) Calcular el valor de $x$ tal que $f(x) = 0$
   e) Indicar el dominio y el rango
   f) ¿En qué intervalos $f(x) > 0$? ¿y menor que cero?
   g) En el intervalo $(-2, 1)$ la función es ¿creciente o decreciente?



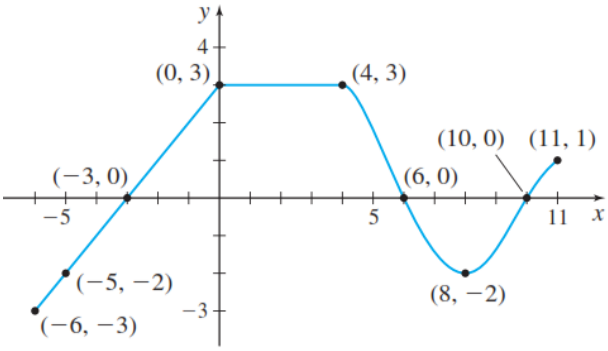
3) Dadas las gráficas de las funciones $f$ y $g$, se pide




a) Indicar los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.
b) ¿Para qué valores de $x$ es $f(x) = g(x)$?
c) Estimar la solución de la ecuación $f(x) = -1$.
d) Establecer el dominio y el rango de $f$
e) Establecer el dominio y rango de $g$
f) ¿Para qué valores de $x$, $g(x) < f(x)$?
g) ¿Sobre qué intervalo/s $f$ es negativa? ¿y $g$?
h) Puedo comparar las funciones en el intervalo (3,4]? ¿Por qué?
i) Calcular las razones de cambio de ambas funciones.

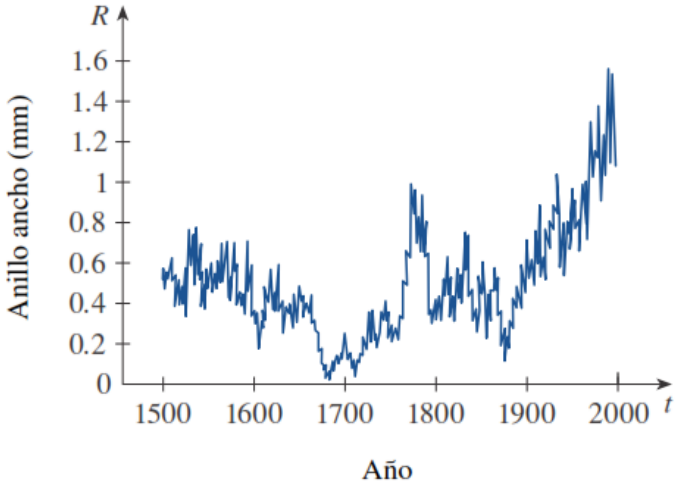


4) Utilizar la gráfica de la función $f$ para responder las siguientes consignas:



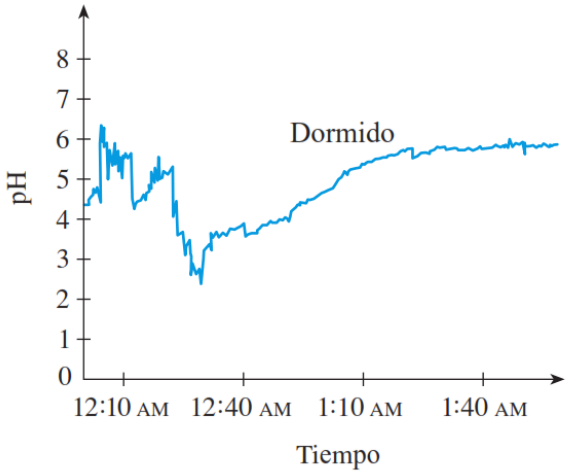

a) Encontrar $f(0)$ y $f(-6)$
b) ¿Es $f(3)$ positiva o negativa? ¿y $f(-4)$?
c) ¿Para cuales valores de $x$ es $f(x) = 0$?
d) ¿Para cuales valores de $x$ es $f(x) > 0$? y ¿negativa?
e) ¿Cuál es el dominio y cuál es el rango de $f$?
f) ¿Cuáles son los cortes con los ejes?
g) ¿Con qué frecuencia la recta $y = 1/2$ interseca la gráfica?
h) ¿Con qué frecuencia la recta $y = 5$ interseca la gráfica?
i) ¿Para cuales valores de $x$ es $f(x) = 3$?
j) ¿Para cuales valores de $x$ es $f(x) = -2$?
k) ¿Sobre cuales intervalos, $f$ es creciente?
l) ¿Sobre cuales intervalos, $f$ es decreciente?
m) ¿Sobre cuales intervalos, $f$ es constante?

5) Ancho de los anillos de los árboles Los árboles crecen más rápido y forman anillos más amplios en los años cálidos y crecen más lentamente y se forman más angostos en los años más fríos. La figura muestra los anchos de los anillos de un pino siberiano desde el año 1500 hasta el año 2000.
a) ¿Cuál es el rango de la función de ancho de anillo?
b) ¿Qué dice la gráfica sobre la temperatura de la tierra?
c) ¿El gráfico refleja las erupciones volcánicas de mediados del siglo XIX?




*Fuente:* adaptado de G. Jacoby *et al.*, "Mongolian Tree Rings and 20th-Century Warming," *Science* 273(1996): 771–773.

6) pH del esófago: Un esófago sano tiene un pH de aproximadamente 7. Cuando se produce reflujo ácido, ácido estomacal (que tiene un pH que va de 1 a 3) fluye hacia atrás desde el estómago al esófago. Cuando el pH del esófago es menor que 4, el episodio se llama "reflujo ácido clínico" y puede causar úlceras y dañar el revestimiento del esófago. El siguiente gráfico muestra el pH esofágico para un paciente dormido con reflujo ácido. ¿Durante qué intervalo de tiempo se considera que el paciente tiene un episodio de reflujo ácido clínico?




*Source:* Adapted from T. Demeester et al., "Patterns of Gastroesophageal Reflux in Health and Disease," *Annals of Surgery* 184 (1976): 459–70.

7) Para cada par de funciones
   a) Calcular los valores en $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1,$ y $x = 2$
   b) Graficar cada una por separado y con distinto color.
   c) Calcular los valores de la función suma en cada uno de los argumentos del ítem a)
   d) Graficar la función suma.
   e) Calcular los valores de la función producto en cada uno de los argumentos del ítem a)
   f) Graficar la función producto

   I) $f(x) = 2x + 3$ $\quad g(x) = 3x - 5$

   II) $f(x) = 2x + 3$ $\quad h(x) = -3x - 12$

   III) $F(x) = x^2 + 1$ $\quad G(x) = x + 1$

IV) $F(x) = x^2 + 1 \qquad H(x) = -x + 1$

8) Encuentre la composición de las funciones dadas. ¿Cuáles pares de funciones conmutan?

a) $f(x) = 2x + 3 \qquad g(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = 2x + 3 \qquad h(x) = -3x - 12$

c) $F(x) = x^2 + 1 \qquad G(x) = x + 1$

d) $F(x) = x^2 + 1 \qquad H(x) = -x + 1$



9) Utilizar la siguiente tabla para evaluar cada una de las siguientes expresiones

a) $f(g(1))$ b) $g(f(1))$ c) $f(f(1))$

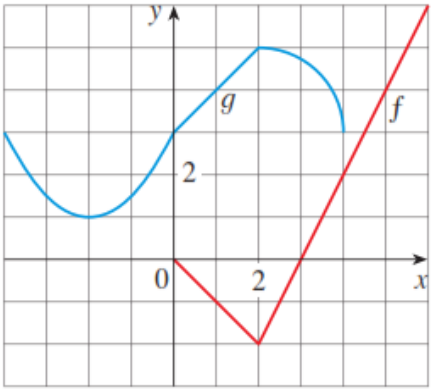
d) $g(g(1))$ e) $(g \circ f)(3)$ f) $(f \circ g)(6)$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 1 | 4 | 2 | 2 | 5 |
| $g(x)$ | 6 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 |

10) Utilice las gráficas dadas de $f$ y $g$ para evaluar cada una de las expresiones siguientes, o explique por qué no están definidas

a) $f(g(2))$ b) $g(f(0))$ c) $(f \circ g)(0)$

d) $(g \circ f)(6)$ e) $(g \circ g)(-2)$ f) $(f \circ f)(4)$




11) Expresar $f$ como una composicón de dos funciones: es decir, encontrar $g$ y $h$ tal que $f = g \circ h$. [Observación: cada elercicio tiena más de una solución]

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ b) $f(x) = |x^2 - 3x + 5|$ c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = \sin^2 x$ e) $f(x) = 3 \sin x^2$ f) $f(x) = 3 \sin^2 x + 4 \sin x$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ h) $f(x) = \dfrac{7}{5 + \cos x}$ i) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}$

12) Considerando los siguientes datos que describen el crecimiento de larvas de anfibios

| Edad $a$ (días) | Longitud $L$ (cm) | Longitud de la cola $T$ (cm) | Masa, $M$ (g) |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 1,5 | 1 | 1,5 |
| 1 | 3 | 0,9 | 3 |
| 1,5 | 4,5 | 0,8 | 6 |
| 2 | 6 | 0,7 | 12 |
| 2,5 | 7,5 | 0,6 | 24 |
| 3 | 9 | 0,5 | 48 |



a) Graficar la longitud como una función de la edad
b) Graficar la longitud de la cola como función de la edad
c) Graficar la longitud de la cola como una función de la longitud.
d) Graficar la masa como una función de la longitud y luego graficar la longitud como una función de la masa. ¿Cómo se comparan las dos gráficas?

13) El número de mosquitos ($M$) que terminan en una habitación es una función de que tan abierta esté la ventana ($W$ en cm$^2$) de acuerdo a $M(W) = 5W + 2$. El número de picaduras ($B$) depende del número de mosquitos según $B(M) = 0{,}5M$. Encontrar el número de picaduras en función de qué tan abierta está la ventana. ¿Cuántas picaduras obtendrías si la ventana estuviera abierta 10 cm$^2$?

14) En número de virus ($V$, medido en trillones o $10^{12}$) que infectan a una persona es una función del grado de inmunosupresión ($I$, la fracción del sistema inmune que esta suprimida por el estrés) de acuerdo a $V(I) = 5I^2$. La fiebre ($F$, medida en $°C$) asociada con una infección es una función del número de virus dada por $F(V) = 37 + 0{,}4V$. Encontrar la fiebre como una función de la inmunosupresión. ¿Qué tan alta será la fiebre si la inmunosupresión es completa ($I = 1$)?

15) Cada una de las siguientes medidas es la suma de dos componentes. Encontrar la fórmula para la suma. Dibujar una gráfica de cada componente y el total como funciones del tiempo para $0 \leq t \leq 3$. Describir cada componente y la suma en palabras.

a) Una población de bacterias está formada por dos tipos, $a$ y $b$. La primera sigue la regla $a(t) = 1 + t^2$, y la segunda sigue la fórmula $b(t) = 1 - 2t + t^2$, donde las poblaciones se miden en millones y el tiempo en horas. La población total es $P(t) = a(t) + b(t)$.
b) El volumen sobre el suelo (tallo y hojas) de una planta es $V_a(t) = 3t + 20 + \frac{t^2}{2}$, y el volumen abajo del suelo (raíces) es $V_b(t) = -1t + 40$ donde $t$ se mide en días y el volumen en cm$^3$. El volumen total es $V(t) = V_a(t) + V_b(t)$.

16) La masa total de una población (en kg) como una función del tiempo, $t$, es el producto del número de individuos, $P(t)$, y la masa por persona, $W(t)$ (en kg). En cada uno de los siguientes ejercicios, encontrar la fórmula de la masa total, trazar las gráficas de $P(t)$, $W(t)$ y la masa total como una función del tiempo para $0 \leq t \leq 100$, y describir el resultado en palabras.
a) La población de personas es $P(t) = 2 \times 10^6 + 2 \times 10^4 t$, y la masa per persona $W(t)$ (en kg) es $W(t) = 80 - 0{,}5t$.
b) La población de personas es $P(t) = 2 \times 10^6 + 1000t^2$, y la masa per persona $W(t)$ (en kg) es $W(t) = 80 - 0{,}5t$.