FUNCIÓN LINEAL

El cálculo es una rama de las matemáticas que estudia el cambio. Si miramos a nuestro alrededor nos damos cuenta de que todo cambia, la población, el nivel de contaminación, la economía, la inflación, la temperatura, también nosotros cambiamos, nuestra edad, estatura, peso, etcétera; por esta razón el ser humano se interesa en medir el cambio.

Reflexiona sobre cómo mides el cambio.

Construcción

Supongamos que actualmente mides 1,80 m de estatura y pesas 65,300 kg, y que hace 10 años tenías una estatura de 1,45 m, mientras que tu peso era de 44 kg.

¿Cuánto ha cambiado tu estatura de 10 años a la fecha? _____

¿Cuánto cambió tu peso en ese tiempo? _____

¿Qué hiciste para obtener los valores anteriores?_____

Si se tratara de cualquier otra cantidad, ¿harías la misma operación para obtener el cambio en un cierto periodo?_____

NOTA En matemáticas, al igual que en otras ramas de la ciencia, se utilizan símbolos especiales para denotar algunos conceptos; tal es el caso del *cambio*, que para denotarlo se utiliza el símbolo Δ que corresponde a la letra "delta" mayúscula del alfabeto griego (que es equivalente a la letra "D" del abecedario romano); así que, si la estatura la denotamos con la letra e, entonces el símbolo Δe representaría el cambio en la estatura.

¿Cómo denotarías el cambio en el peso? _____, y ¿el cambio en el tiempo?_____

Es obvio que la estatura de una persona cambia paulatinamente, por lo que sería bueno calcular cuánto creciste por año durante los últimos 10. ¿Qué harías para obtener esta información? _____.

¿Cuánto creciste por año? _____ .

En matemáticas, a este número se le llama **razón promedio de cambio** o **cambio promedio** de la estatura, y se denota por $\frac{\Delta e}{\Delta t}$.

Encuentra el cambio promedio del peso en el periodo de 10 años

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \text{____}$$

En resumen, para obtener el *cambio* (absoluto) de una cantidad *"y"*, en un intervalo de tiempo $[a, b]$, el valor de dicha cantidad en el tiempo b, se le resta el valor que ésta tenía en el tiempo a, es decir

$$Cambio \text{ en } y = \Delta y = y_2 - y_1$$

y para obtener el *cambio promedio* de una cantidad "y" en un intervalo de tiempo $[a, b]$, se divide el cambio en "y" entre el cambio en el tiempo, es decir

$$Cambio\ promedio \text{ de "}y\text{"} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{b - a} = \frac{cambio\ en\ la\ variable\ dependiente}{cambio\ en\ la\ variable\ independiente}$$

NOTA Obtener el cambio promedio en un intervalo $[t_1, t_2]$ es equivalente a obtener la pendiente de la línea que une los puntos (t_1, y_1) y (t_2, y_2). En lo sucesivo, llamaremos pendiente al cambio promedio.

La razón por la que se estudia el cambio y el cambio promedio es porque proporcionan información acerca del comportamiento de los valores de una variable y con base en esto se pueden analizar situaciones para tomar decisiones.

En matemáticas también se emplea el cambio y el cambio promedio para clasificar funciones, por ejemplo, *cuando una función tiene un cambio promedio constante* para cualquier periodo que se analice, ésta recibe el nombre de ***función lineal***.

Cómo reconocer una función lineal

Las ***funciones lineales*** se caracterizan por tener un ***cambio promedio (una pendiente) constante***; es decir, para cualquier par de puntos que se analicen, el cambio promedio siempre será el mismo.

El cambio promedio (la pendiente) puede ser positivo, si los valores de la función aumentan, o negativo, si los valores de la función disminuyen.

El símbolo que se utiliza para denotar la pendiente es la letra m. Como el cambio promedio y la pendiente son conceptos equivalentes, entonces concluimos que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, por lo que en adelante también utilizaremos la letra m para denotar al cambio promedio.

Ejemplo 1: Determina si la siguiente función, expresada en una tabla de valores, es lineal.

x	0	5	7	19
y	3	13	23	33

Solución Para determinar si es lineal tenemos que encontrar el cambio promedio (la pendiente) para cada par de puntos consecutivos, es decir, entre los puntos (0, 3) y (5, 13), el cambio promedio es:

$$m = \frac{13-3}{5-0} = 2$$

y entre los puntos (5, 13) y (7, 23), el cambio promedio es

$$m = \frac{23-13}{7-5} = 5$$



no hay necesidad de continuar buscando los cambios promedio para los demás puntos, ya que de aquí podemos concluir que la función no es lineal porque el cambio promedio (la pendiente) para estos dos pares de puntos no es el mismo. ■

Ejemplo 2: Determina si la siguiente función, expresada en una tabla de valores, es lineal.

x	-1	0	3	5	9
y	5,5	7	11,5	15,4	20,5

Solución De nuevo, para determinar si es lineal hay que encontrar el cambio promedio (la pendiente) para cada par de puntos consecutivos, es decir, entre los puntos $(-1;\ 5{,}5)$ y $(0, 7)$, el cambio promedio es:

$$m = \frac{7-5{,}5}{0-(-1)} = 1{,}5$$

Entre los puntos $(0, 7)$ y $(3;\ 11{,}5)$ el cambio promedio es:

$$m = \frac{11{,}5 - 7}{3 - 0} = 1{,}5$$

El hecho de que en dos pares de puntos el cambio promedio sea el mismo, no implica que la función sea lineal; tenemos que verificar que la pendiente sea constante para todas las parejas dadas en la tabla.

Entre los puntos $(3;\ 11{,}5)$ y $(5;\ 14{,}5)$, la pendiente es $m = \frac{14{,}5-11{,}5}{5-3} = 1{,}5$

Entre los puntos $(5;\ 14{,}5)$ y $(9;\ 20{,}5)$, la pendiente es $m = \frac{20{,}5-14{,}5}{9-5} = 1{,}5$

Como el cambio promedio (la pendiente) es constante (me dio lo mismo 1,5) para todo par de puntos, concluimos que la función dada es lineal.

Observación: por comodidad o costumbre, se tomaron pares de puntos consecutivos, sin embargo cuando la función **es** lineal, la pendiente es la misma cuando se toman dos puntos cualesquiera, por ejemplo si calculamos m entre los puntos $(-1;\ 5{,}5)$ y $(5;\ 14{,}5)$ debería dar 1,5. Verifiquemos:

$$m = \frac{14{,}5 - 5{,}5}{5 - (-1)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \ \blacksquare$$

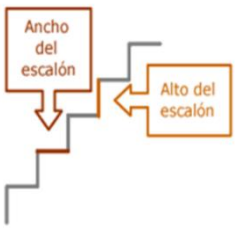
NOTA Observemos que aunque los valores de x y y no aumentan en forma constante, podemos decir que la función se ajusta a un modelo lineal, ya que sí aumentan en forma proporcional de un punto a otro; es decir, obtuvimos que el cambio promedio es de 1,5. Éste representa el cambio de y por cada unidad de x; también observemos que del segundo al tercer punto la x aumentó 3 unidades; ahora observemos cuánto aumentó la y del segundo al tercer punto: aumentó en tres veces el cambio promedio, es decir, aumentó 4,5 unidades; lo mismo ocurre en los demás puntos, el aumento para x y y en puntos consecutivos se da en la misma proporción. Al ser un cambio proporcional podemos asegurar que es una función lineal.

Un concepto muy utilizado en Matemáticas Aplicadas es el de ***Pendiente de una recta***.

Pendiente

La pendiente de una recta se define como el cociente del cambio en el valor de la variable "y", entre el cambio en el valor de la variable "x". La pendiente es relevante porque muchas de las representaciones de fenómenos son líneas rectas. Este concepto indica el grado de inclinación de la recta. Cuando la pendiente es positiva decimos que **la recta es creciente**, por el contrario si la pendiente es negativa entonces **la recta es decreciente**, las rectas horizontales tienen pendiente cero y a las verticales **no se les define pendiente**.

Observa que en cada escalón de la escalera de tu casa, o de la facultad, hay una distancia que corresponde al ancho del escalón y otra distancia que es la altura del escalón. ¿Te ha pasado que cuando subes una escalera, hay ocasiones en que te cuesta más trabajo subir? Una razón puede ser tu condición física sin duda, pero otra razón viable es la inclinación de la escalera. Veamos por qué.



La relación que existe entre el alto y el ancho del escalón constituye la inclinación de la escalera. Por lo tanto, si queremos saber cuál es la inclinación de la escalera, debemos dividir el alto del escalón entre ancho del mismo. Si representamos esto como un cociente tenemos que:

$$INCLINACIÓN\ DE\ LA\ ESCALERA = \frac{alto\ del\ escalón}{ancho\ del\ escalón}$$

Cuando la pendiente, m, se acerca a cero la escalinata es casi horizontal, en cambio si la pendiente es muy grande -o sea tiende a infinito- pensamos en una escalera muy empinada, casi vertical.

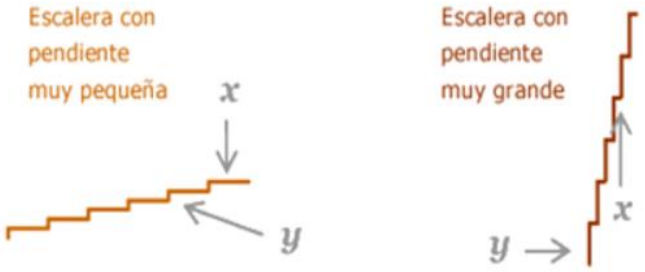


Esta inclinación sería la pendiente de la escalera. Pero, ¿cómo lograr una pendiente muy grande o muy pequeña? Primero pensemos en la relación que existe entre el ancho, x, y el alto de la escalera, y, considerando la inclinación m, como la pendiente.

$$INCLINACIÓN = \frac{alto\ del\ escalón}{ancho\ del\ escalón}$$

$$m = \frac{y}{x}$$

Observa nuevamente la figura. Cuando la pendiente es pequeña, implica que y es pequeña, o al menos es más chica que x. Si la pendiente es grande, entonces y es mayor que x. Como y es igual al alto del escalón, la pendiente es grande y la escalera está muy inclinada, lo que implica que te canses más al subirla. Por otro lado, si la altura del escalón es poca, la inclinación es menor, o sea, la pendiente es pequeña y te cansas menos al subir las escaleras.



El concepto de pendiente está estrechamente unido al de **ecuación de primer grado** cuyas gráficas son rectas. La forma más común de representar una de estas ecuaciones es la siguiente:

$$y = mx + b,$$

Donde m es la pendiente y b el punto en el que la recta cruza al eje y. Este valor se conoce como **ordenada al origen** de la recta.

Esto te será muy útil en el estudio de fenómenos con un comportamiento lineal.

Ecuación de una función lineal

CONSTRUCCIÓN

Para *encontrar una fórmula* que describa una función lineal, podemos aprovechar el hecho de que el cambio promedio es constante.

Retomemos el ejemplo anterior, donde $m = 1{,}5$ y, sabemos que si $x = 0$, $y = 7$ (observemos la tabla de datos anterior).

Expresaremos cada uno de los puntos de la tabla anterior en términos del cambio promedio $m = 1{,}5$ y del punto $(0, 7)$, que es la intersección con el eje y.

Para $x = 3$, el valor de y es $y = 11{,}5$, este valor lo podemos escribir como $11{,}5 = 7 + 1{,}5\ (3)$.

Para $x = 5$, el valor de y es $y = 14{,}5$, este valor lo podemos escribir como $14{,}5 = 7 + 1{,}5\ (5)$.

Para $x = 9$, el valor de y es $y = 20{,}5$, este valor lo podemos escribir como $20{,}5 = 7 + 1{,}5\ (9)$.

Por último, este comportamiento también se cumple para $x = -1$, ya que en este caso se tiene que

$$5{,}5 = 7 + 1{,}5\ (-1).$$

Podemos resumir el análisis anterior en la siguiente tabla:

$x = -1$	$y = 7 + 1{,}5\ (-1)$
$x = 0$	$y = 7 + 1{,}5\ (0)$
$x = 3$	$y = 7 + 1{,}5\ (3)$
$x = 5$	$y = 7 + 1{,}5\ (5)$
$x = 9$	$y = 7 + 1{,}5\ (9)$

Por tanto, concluimos que para un valor cualquiera de x, la ecuación para esta función lineal es

$$y = \underbrace{7}_{\text{Valor de y cuando } x=0} + \underbrace{1{,}5}_{\text{Cambio promedio (pendiente)}}\ x$$

Al generalizar lo anterior tenemos que: La **ecuación de una función lineal** de la forma *pendiente-ordenada*

$$y = b + mx$$

donde m representa el cambio promedio de la función (pendiente) y b es la intersección con el eje y (el valor de y cuando $x = 0$) (ordenada).

Para obtener la ecuación utilizaremos la forma *punto-pendiente*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde m es la pendiente (cambio promedio en la función con respecto a x) y (x_1, y_1) es un punto de la función (cualquiera).

Si no conocemos la pendiente, podemos obtenerla con la fórmula

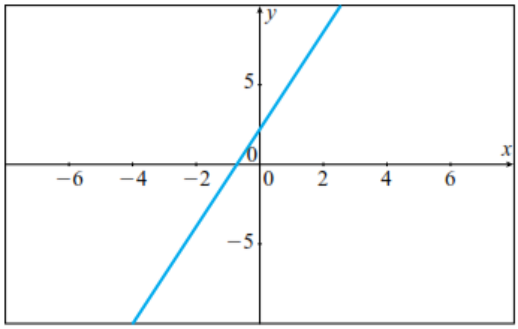
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos de la función (cualesquiera). Observa que la fórmula de la pendiente es la división del cambio en y entre el cambio en x.

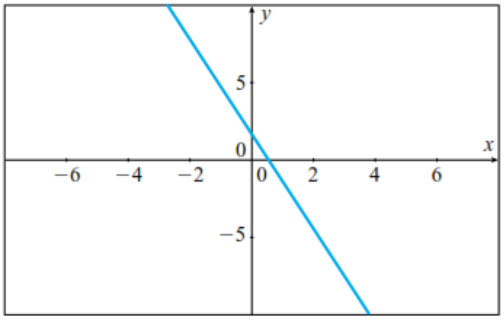
Gráfica de una función lineal

La gráfica de una función lineal es una línea recta que puede ser creciente, decreciente, u horizontal, dependiendo de cómo sea la pendiente. Para la función $y = b + mx$:

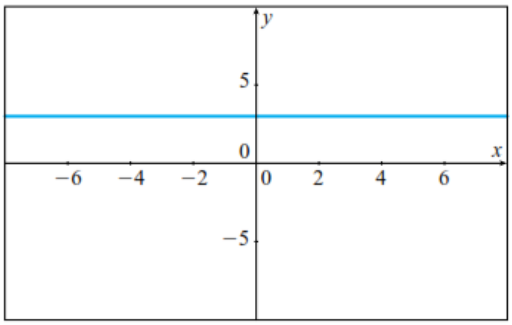
➥Si la pendiente es positiva *entonces* la función es creciente y su gráfica quedaría como:



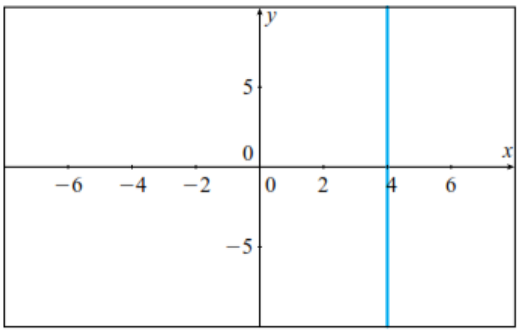
➥ Si la pendiente es negativa entonces la función es decreciente y su gráfica quedaría como:



➥ Si la pendiente es cero entonces la función es constante y su gráfica quedaría como una recta horizontal que puede estar arriba o abajo del eje x, depende del signo de b. La ecuación es de la forma $y = b$.



➥ Las rectas cuyas gráficas son verticales no son funciones, ya que en ese caso su ecuación sería de la forma $x = a$, lo que significa que para un solo valor de x, el valor de y puede ser cualquier valor.



Ejemplo 3: (a) A medida que el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría. Si la temperatura del suelo es de 20°C y la temperatura a una altura de 1 km es de 10°C, exprese la temperatura T (en °C) en función de la altura h (en kilómetros), suponiendo que sea apropiado un modelo lineal.
(b) Dibuje la gráfica de la función en la parte (a). ¿Qué representa la pendiente?
(c) ¿Cuál es la temperatura a una altura de 2,5 km?

Solución

(a) Cómo estamos suponiendo que T(temperatura) es una función lineal de h (altura), podemos escribir

$$T = T(h) = mh + b$$

Como dato tenemos que $T = 20$ cuando $h = 0$, $(T(0) = 20)$ así que

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

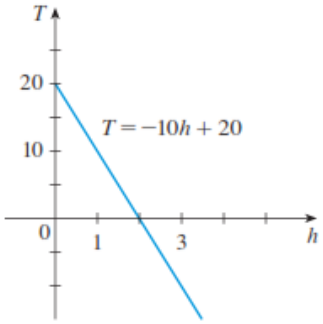
En otras palabras, la intersección con el eje y es $b = 20$.

También tenemos como dato que $T = 10$ cuando $h = 1$, $(T(1) = 10)$ así que

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

Por lo tanto la pendiente de la recta es $m = 10 - 20 = -10$ y la función lineal pedida es

$$T = -10h + 20$$



(b) La gráfica es la de la figura. La pendiente es $m = -10°C/km$, y representa la tasa de cambio de temperatura con respecto a la altura. Me dice que por cada kilómetro que asciendo la temperatura baja 10 grados.

(c) A una altura de $h = 2{,}5\ km$, la temperatura es

$$T = -10(2{,}5) + 20 = -5°C \ \blacksquare$$

A TRABAJAR

Ejercicio 1: Determina si la función dada en la tabla es lineal. Si lo es, proporciona su ecuación.

x	1	6	11	16
y	−2,38	−0,88	0,62	2,12

Solución: a) ¿Es una función lineal? _____ ¿Por qué?_____

_____

b) La ecuación a obtener es de la forma_____

¿Qué datos necesitas para plantear la ecuación?_____

¿Cuál es el cambio promedio (la pendiente) de la función?_____

¿Cómo obtienes b(el corte con el eje y)?_____

Encuentra el valor de b.

Por último la ecuación queda expresada como: _____■

En los siguientes ejercicios obtén la ecuación solicitada.

Ejercicio 2. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(3, -5)$.

Ejercicio 3. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, -5)$ y $(3, 4)$.

Ejercicio 4. La ecuación de la función definida por la siguiente tabla de datos.

x	-3	-1	1	3
y	$-6{,}2$	$-1{,}2$	3,8	8,8

Ejercicio 5. Determina cuál de las siguientes tablas corresponde a un modelo lineal.

a)

p	-1	3	7	11
q	3.4	4.6	5.8	7

b)

r	1.1	2.2	3.3	4
t	18	23	28	33

c)

x	2	4	6	8
y	-10	-12	-15	-17

d)

z	$-1/2$	$1/2$	$3/2$	$5/2$
w	120	100	80	60

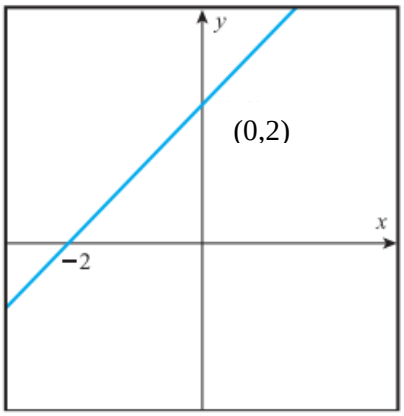
Ejercicio 6. Sean $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -3x + 5$

(a) Resolver $f(x) = 0$ (b) Resolver $f(x) > 0$

(c) Resolver $f(x) = g(x)$ (d) Resolver $f(x) \leq g(x)$

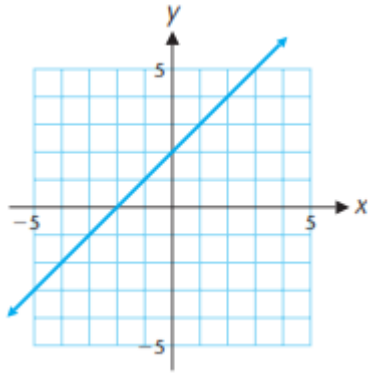
(e) Graficar $y = f(x)$ y $y = g(x)$ e indicar el punto que representa la solución de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Ejercicio 7. Obtén la ecuación para la función dada en la siguiente gráfica:

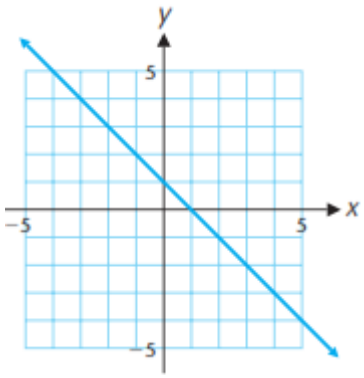


Ejercicio 8. Dadas las siguientes gráficas encontrar: corte con los ejes, pendiente, conjuntos de positividad y negatividad. Escribir la ecuación pendiente-ordenada de cada recta.

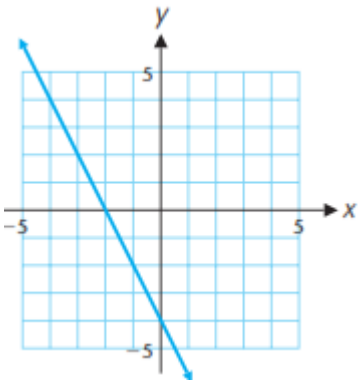
a)



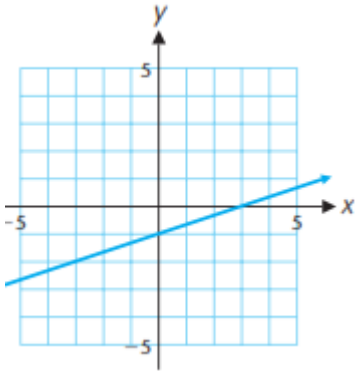
b)



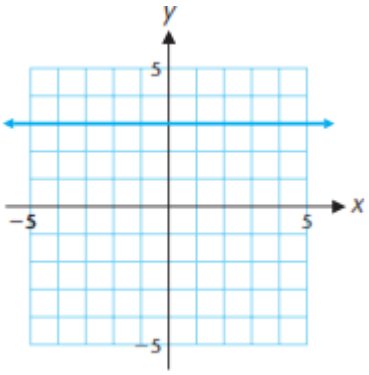
c)



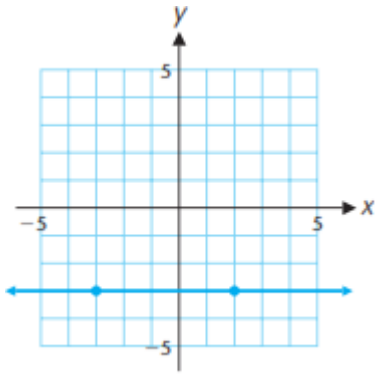
d)



e)



f)



Ejercicio 9. A) Graficar las siguientes ecuaciones y marca los puntos de intersección con los ejes coordenados.

B) Dar la pendiente, la ordenada y la raíz.

C) Dar los intervalos de positividad y negatividad.

D) Construir una tabla para $x = -2, -1, 0, 1$ y 2, y completarla con $\Delta x, \Delta y$ y $\Delta y/\Delta x$.

a) $y = 5x - 3$ **b)** $2x - 3y = 1$ **c)** $-5 - 3y = -x$ **d)** $y = 3 + 4x$ **e)** $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

Ejercicio 10. Calcula las siguientes pendientes de la escalera, redondea el resultado a dos decimales.

ancho escalón	alto del escalón	Pendiente de la recta
2	1	
2	3	
6	9	
5	7	

Ejercicio 11. **Cambio climático** Estudios recientes indican que la temperatura media de la superficie de la tierra ha aumentado constantemente. Algunos científicos han modelado la temperatura mediante la función lineal $T = 0{,}02t + 15$, donde T es la temperatura en $°C$ y t representa años desde 1950.

(a) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje T?

(b) Use la ecuación para predecir la temperatura media global de la superficie de la Tierra en 2100.

Ejercicio 12. **Dosis de medicamentos** Si la dosis recomendada a un adulto para un medicamento es D (en mg), entonces, para determinar la dosis apropiada c para un niño de edad a, los farmacéuticos usan la ecuación

$$c = 0.0417D(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es 200 mg.

(a) Encuentre la pendiente. ¿Qué representa ésta?

(b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

Ejercicio 13. Escalas de temperatura La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la ecuación

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

C	F
−30°	
−20°	
−10°	
0°	
	50°
	68°
	86°

(a) Complete la tabla para comparar las dos escalas a los valores dados.

(b) Dibuje la gráfica de esta función.

(c) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección con el eje F y qué representa?

(d) La temperatura corporal normal en humanos varía de 97,6°F a 99,6°F. Convierta este rango de temperatura a grados Celsius.

(e) Encuentre la temperatura a la que las escalas son iguales. [*Sugerencia:* Suponga que a es la temperatura a la que las escalas son iguales. Haga $F = a$ y $C = a$ y a continuación despeje a.]

Ejercicio 14. **Absorción de líquido cefalorraquídeo** El cuerpo produce y reabsorbe continuamente líquido cefalorraquídeo a una velocidad que depende de su volumen actual. Un investigador médico encuentra que la absorción ocurre a una velocidad de 0,35 ml / min cuando el volumen de líquido es de 150 ml y a una velocidad de 0,14 ml / min cuando el volumen es de 50 ml.

(a) Suponga que la tasa de absorción A es una función lineal de volumen V. Dibuje un gráfico de $A(V)$.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

(c) ¿Cuál es la intersección de la gráfica con el eje A y qué representa?

Ejercicio 15. **Medición de la actividad cerebral** La IRM es un método para inferir la actividad cerebral midiendo los cambios en el flujo sanguíneo a diferentes partes del cerebro (los cambios en el flujo sanguíneo se pueden medir de manera no invasiva con un escáner de resonancia magnética). La técnica funciona

debido a una correlación entre la tasa de flujo sanguíneo (que se puede medir con el escáner) y la actividad cerebral. ***Logothetis et al. (2001)*** mostraron en experimentos con monos macacos que el flujo sanguíneo (y) está relacionado linealmente con la actividad cerebral (x). Tanto x como y se miden en escalas de 0 a 1.

(a) Aquí hay dos puntos de datos de ***Logothetis et al. (2001)***:

x	y
0,16	0,52
1	1

Encuentra una fórmula para y en términos de x.

(b) Encuentre la tasa de flujo sanguíneo (y) correspondiente a cada una de las siguientes medidas de actividad cerebral.

(i) $x = 0.5$ **(ii)** $x = 0.9$ **(iii)** $x = 0$

(c) Es más útil tener una fórmula para la actividad cerebral (x) en términos de flujo sanguíneo (y), ya que se puede medir el flujo sanguíneo. Obtenga esta fórmula de su respuesta a la parte (a).