RAZON DE CAMBIO y DERIVADA GRÁFICA

La pregunta que te harás a esta altura es ¿para qué todo esto? La vida es cambio, y queremos poder predecir cómo y cuánto cambia.

El cálculo es el estudio del cambio y las tasas de cambio. Tiene dos conceptos principales, la *derivada* y la *integral*. Dada una función que relaciona una variable dependiente con una variable independiente, la derivada es la tasa o razón de cambio (instantánea) de la variable dependiente a medida que cambia la variable independiente. Determinamos la *derivada* de una función cuando respondemos preguntas como:

1. Dado el tamaño de la población en función del tiempo, ¿a qué ritmo está creciendo la población?
2. Dada la posición de una partícula en función del tiempo, ¿cuál es su velocidad?
3. ¿A qué velocidad disminuye la densidad del aire al aumentar la altitud?
4. ¿A qué velocidad cambia la presión de un mol de O_2 a 300°K a medida que cambia el volumen si la temperatura es constante?

Por otro lado, dada la tasa de cambio de una variable dependiente a medida que cambia una variable independiente, la *integral* es la función que relaciona la variable dependiente con la variable independiente.

1. Dada la tasa de crecimiento de una población en todo momento en un intervalo de tiempo, ¿cuánto cambió el tamaño de la población durante ese intervalo de tiempo?
2. Dada la tasa de depuración renal de la penicilina durante las cuatro horas posteriores a una inyección inicial, ¿cuál será el nivel de penicilina en plasma al final de ese intervalo de cuatro horas?
3. Dado que un automóvil salió de San Luis a las 13:00 hs viajando hacia el oeste por la autopista y dada la velocidad del automóvil entre las 13 y las 15 hs, ¿dónde estaba el automóvil a las 15 hs?

MEDIR EL CAMBIO

El cambio se mide de varias maneras. El cambio real en una cantidad durante un intervalo se calcula mediante resta. El cambio porcentual y la tasa de cambio promedio son dos medidas de cambio durante un intervalo que se pueden calcular mediante manipulación aritmética simple. Considerar la tasa promedio de cambio en intervalos cada vez más pequeños conduce al concepto más sutil de cambio instantáneo. El estudio del cambio instantáneo utilizando la derivada es una de las dos partes principales del cálculo.

La tasa de cambio instantánea en un punto se describe gráficamente como la pendiente de la recta tangente y se puede estimar tanto numérica como gráficamente.

Medidas de cambio sobre un intervalo

Ya que uno de los objetivos principales del cálculo es medir el cambio que ocurre en un punto. Como preparación para comprender cómo se utiliza el cálculo para describir el cambio en un punto, describiremos tres formas de medir el cambio que ocurre durante un intervalo.

Cambio, cambio porcentual y tasa de cambio promedio

Ejemplo 1: Las ventas netas anuales de Apple Corporation aumentaron de aproximadamente 7,98 billones de dólares a 32,48 billones de dólares en un período de ocho años. (Fuente: Presentaciones 10-K de Apple Corp. para 2002 y 2008) Este crecimiento se puede expresar como un *cambio*:

$$\begin{aligned} cambio &= nuevo - viejo \\ &= 32{,}48 - 7{,}98 = 24{,}50 \end{aligned}$$

Las ventas netas anuales de Apple aumentaron aproximadamente 24,5 billones de dólares en ocho años.

El cambio se puede expresar como un *cambio porcentual*:

$$\begin{aligned} porcentaje\ de\ cambio &= \frac{nuevo - viejo}{viejo}(100\%) \\ &= \frac{32{,}48 - 7{,}98}{7{,}98}(100\%) \approx 307\% \end{aligned}$$

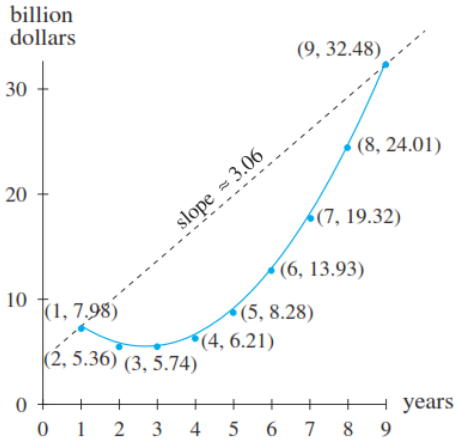
Las ventas netas anuales de Apple aumentaron aproximadamente 307% en ocho años.

O podemos expresarlas como una razón de cambio promedio:

$$razon\ de\ cambio\ promedio = \frac{cambio}{longitud\ del\ intervalo}$$
$$= \frac{32{,}48 - 7{,}98}{8} \approx 3{,}06$$

Las ventas netas anuales de Apple aumentaron en promedio 3,06 billones por año durante ocho años.

La tasa de cambio promedio es la pendiente de la línea que pasa por dos puntos.



Aunque la tasa de cambio promedio es útil, puede resultar engañosa. En el caso de las ventas netas de Apple, la tasa de cambio promedio no muestra la disminución de las ventas durante los dos primeros años del período de ocho años.■

Resumimos estas tres formas de describir el cambio en el siguiente cuadro

Cambio, cambio porcentual, y razón de cambio promedio

Si una cantidad cambia de un valor m a un valor n sobre cierto intervalo de a a b, entonces

- El cambio en la cantidad de encuentra restando el primer valor del segundo

$$cambio = n - m$$

- El cambio porcentual es el cambio dividido por el primer valor y luego multiplicado por 100.

$$cambio\ porcentual = \frac{cambio}{primer\ valor} \cdot 100\% = \frac{n-m}{m} \cdot 100\%$$

- La razón de cambio promedio es el cambio dividida por la longitud del intervalo

$$razón\ de\ cambio\ promedio = \frac{cambio}{longitud\ del\ intervalo} = \frac{n-m}{b-a}$$

Como trabajamos con funciones

Cambio, cambio porcentual, y razón de cambio promedio de una función

Si x_1 y x_2 son dos valores de entrada específicos de f y $x_1 < x_2$, entonces

- El **cambio** de f desde x_1 a x_2 es

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

- El **cambio porcentual** de f desde x_1 a x_2 es

$$cambio\ porcentual = \frac{\Delta f}{f(x_1)} \cdot 100\% = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)} \cdot 100\%$$

- La **razón de cambio promedio** de f desde x_1 a x_2 es

$$razón\ de\ cambio\ promedio = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Interpretaciones de medidas de cambio

Calcular correctamente estas medidas de cambio es importante, pero es igualmente importante comprender el resultado y ser capaz de expresarlo en una oración significativa en el contexto de la situación. Al interpretar una medida de cambio, debemos responder las siguientes preguntas:

• *¿Cuando?* Especificar el intervalo de entrada.

• *¿Qué?* Especificar la cantidad que está cambiando.

• *¿Cómo?* Indicar si el cambio es un aumento o una disminución.

• *¿Por cuánto?* Escribir la respuesta numérica etiquetada con las unidades adecuadas.

Cuando se mide el cambio en $f(x)$, la unidad de medida para

– *el cambio* es la misma que la unidad de medida de $f(x)$.

– *el cambio porcentual* es por ciento.

– *la tasa de cambio promedio* es la unidad de medida de $f(x)$ per unidad de medida de x.

Ejemplo 2: La temperatura fue de 15°C a las 7 de la mañana, y de 31°C a las 13 hs. El cambio en la temperatura entre las 1 y las 13 hs se calcula como

$$cambio = 31 - 15 = 16$$

La temperatura a las 13 hs fue 16°C mayor que la temperatura a las 7 hs.■

Ejemplo 3: La temperatura fue de 35°C a las 15 hs, y de 26°C a las 20 hs. La razón de cambio promedio en la temperatura entre las 15 y las 20 hs se calcula como

$$razón\ de\ cambio\ promedio = \frac{26-35}{20-15} \approx -1{,}8$$

La temperatura decreció en promedio 1,8°C per hora entre las 15 y las 20 horas. ■

RAZÓN DE CAMBIO INSTANTANEA

Ahora consideraremos la tasa o razón de cambio de una función en un punto. Cuando un objeto se mueve en línea recta, la tasa promedio de cambio de posición con respecto al tiempo es la velocidad promedio. Si la posición se expresa como $y = f(t)$, donde t es el tiempo, entonces

$$Tasa\ de\ cambio\ promedio\ en\ la\ posición\ entre\ t = a\ y\ \ t = b = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

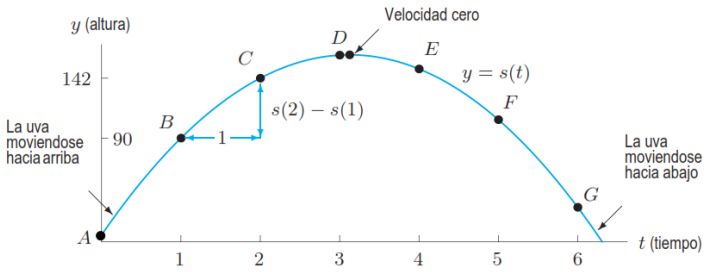
Si conducimos 200 kilómetros en 4 horas, la velocidad promedio es $200/4 = 50\ km/hora$. Por supuesto, esto no significa que viajemos exactamente a 50 km/h durante todo el viaje. La velocidad en un instante dado durante el viaje se muestra en el velocímetro, y esta es la cantidad que investigamos ahora.

Velocidad instantánea

Ejemplo 4: Lanzamos una uva directamente hacia arriba al aire. La tabla da su altura, y, en el tiempo t. ¿Cuál es la velocidad de la uva exactamente en $t = 1$? Usamos velocidades promedio para estimar esta cantidad

$t\ (seg)$	0	1	2	3	4	5	6
$y = s(t)\ (cm)$	6	90	142	162	150	106	30

La velocidad promedio en el intervalo $0 \le t \le 1$ es 84 cm/s y la velocidad promedio en el intervalo $1 \le t \le 2$ es 52 cm/s. Observemos que la velocidad promedio antes de $t = 1$ es mayor que la velocidad promedio después de $t = 1$, ya que la uva está desacelerando.



Esperamos que la velocidad en $t = 1$ esté entre estas dos velocidades promedio. ¿Cómo podemos encontrar la velocidad exactamente en $t = 1$? Observamos con más detalle lo que sucede cerca de $t = 1$. Supongamos que encontramos las velocidades promedio a cada lado de $t = 1$ en intervalos cada vez más pequeños, como en la figura siguiente.

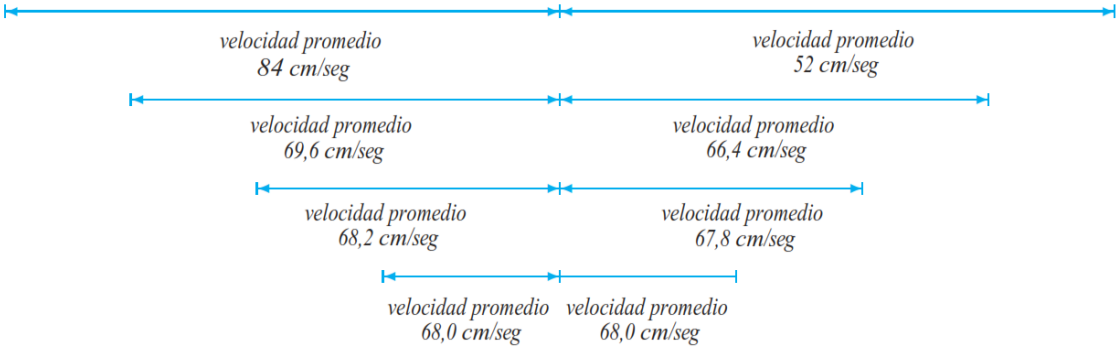
t	0	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	2
$y = s(t)$	6.000	83.040	89.318	89.932	90.000	90.068	90.678	96.640	142.000

Entonces, por ejemplo:

$$\textit{Velocidad promedio entre } t = 1 \textit{ y } t = 0{,}01 \quad = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{s(1{,}01) - s(1)}{1{,}01 - 1} = \frac{90{,}678 - 90}{0{,}01} = 67{,}8\ cm/seg$$

Esperamos que la velocidad instantánea en $t = 1$ esté entre las velocidades promedio de ambos lados de $t = 1$. En la siguiente figura, a medida que el intervalo se hace más pequeño, los valores de la velocidad promedio antes y después de $t = 1$ se van acercando al mismo valor.

t	0	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	2
$y = s(t)$	6.000	83.040	89.318	89.932	90.000	90.068	90.678	96.640	142.000



Para los intervalos más pequeños, ambas velocidades son 68,0 cm/seg (a un lugar decimal), así qué podemos decir que la velocidad en $t = 1$, es de 68 cm/seg.■

Por supuesto, si mostráramos más lugares decimales, las velocidades promedio, antes y después de $t = 1$ podrían no coincidir. Si quisieramos calcular la velocidad en $t = 1$, con más lugares decimales de precisión, deberíamos tomar intervalos cada vez más pequeños, a ambos lados de $t = 1$, hasta que las velocidades promedio coincidan con el número de decimales que queremos. De esta manera, podemos estimar la velocidad en $t = 1$ con cualquier precisión.

Definición de velocidad instantánea utilizando la idea de límite

Cuando tomamos intervalos más pequeños cerca de $t = 1$, resulta que las velocidades promedio de la uva siempre están justo por encima o por debajo de 68 cm/seg. Entonces, parece natural definir la velocidad en el instante $t = 1$ como 68 cm/seg. Esto se llama *velocidad instantánea* en este punto. Su definición depende de que estemos

convencidos de que intervalos cada vez más pequeños proporcionan velocidades promedio que se acercan arbitrariamente a 68. A este proceso se le llama *tomar el límite*.

La velocidad instantánea de un objeto en el tiempo t se define como el límite de la velocidad promedio del objeto en intervalos de tiempo cada vez más cortos que contienen t.

Observemos que la velocidad instantánea parece ser exactamente 68, pero ¿y si fuera 68,000001? ¿Cómo podemos estar seguros de que hemos tomado intervalos lo suficientemente pequeños? Demostrar que el límite es exactamente 68 requiere un conocimiento más preciso de cómo se calcularon las velocidades y del proceso del límite, tema que va más allá de esta materia.

Tasa de cambio instantánea

Podemos definir la *tasa de cambio instantánea* de cualquier función $y = f(t)$ en un punto $t = a$. Imitamos lo que hicimos con la velocidad y observamos la tasa de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños.

La **tasa de cambio instantánea** de f en a, también llamada tasa de cambio de f en a, se define como el límite de las tasas de cambio promedio de f en intervalos cada vez más cortos alrededor de a.

Ejemplo 5: La cantidad (en mg) de un fármaco en la sangre en el momento t (en minutos) está dada por

$$Q = 25 \cdot (0{,}8)^t.$$

Estimar la tasa de cambio de la cantidad en $t = 3$ e interpretar la respuesta.

Solución: Estimamos la tasa de cambio en $t = 3$ calculando la tasa de cambio promedio en intervalos cercanos a $t = 3$. Podemos hacer que nuestra estimación sea tan precisa como queramos eligiendo nuestros intervalos lo suficientemente pequeños. Veamos la tasa de cambio promedio en el intervalo $3 \le t \le 3{,}01$:

$$\textit{Razón de cambio promedio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{25 \cdot (0{,}8)^{3{,}01} - 25 \cdot (0{,}8)^3}{3{,}01 - 3} = \frac{12{,}7715 - 12{,}8}{0{,}01} = -2{,}85$$

Una estimación razonable de la tasa de cambio de la cantidad en $t = 3$ es $-2{,}85$. Como Q está en mg y t en minutos, las unidades de $\Delta Q/\Delta t$ son $mg/minuto$. Como la tasa de cambio es negativa, la cantidad de fármaco está disminuyendo. Después de 3 minutos, la cantidad de fármaco en el cuerpo disminuye a razón de 2,85 mg/minuto.■

La derivada en un punto

La tasa de cambio instantánea de una función f en un punto a es tan importante que recibe su propio nombre, *la derivada de f en a*, denotada $f'(a)$ (léase "f-prima de a"). Si queremos enfatizar que $f'(a)$ es la tasa de cambio de $f(x)$ a medida que aumenta la variable x, decimos que $f'(a)$ es la derivada de f con respecto a x en $x = a$. Observemos que la derivada es sólo un nuevo nombre para la tasa de cambio de una función.

La **derivada de f en a**, escrita $f'(a)$, se define como la tasa de cambio instantánea de f en el punto a.

Ejemplo 6: Estimar $f'(2)$ si $f(x) = x^3$.

Solución: Como $f'(2)$ es la derivada, o razón de cambio instantanea, de $f(x) = x^3$ en 2, calculamos la tasa de cambio promedio en intervalos cercanos a 2. Usando el intervalo $2 \le x \le 2.001$, vemos que

$$\textit{Razón de cambio promedio sobre } 2 \le x \le 2{,}001 = \frac{(2{,}001)^3 - (2)^3}{2{,}001 - 2} = \frac{8{,}0120 - 8}{0{,}001} = 12{,}0$$

La tasa de cambio de $f(x)$ en $x = 2$ parece ser aproximadamente 12, por lo que estimamos $f'(2) = 12$. ■

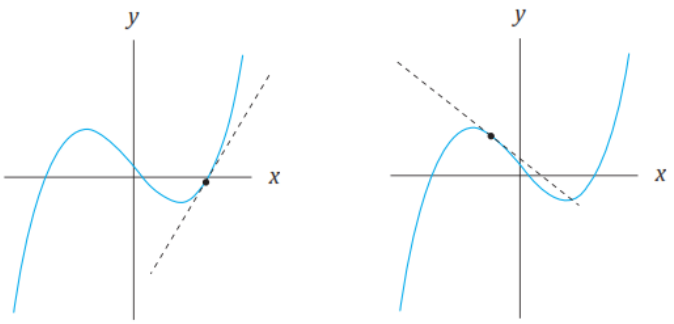
Visualizando la derivada: pendiente del gráfico y pendiente de la línea tangente

Rectas tangentes en curvas Es importante tener una idea intuitiva de las rectas tangentes y poder dibujarlas. En general, una recta tangente se encuentra muy cerca de la curva cerca del punto, pero no atraviesa la curva.

Regla general para rectas tangentes

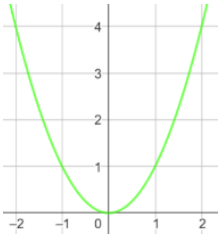
Las rectas tangentes a una gráfica suave y no lineal no atraviesan la gráfica en el punto de tangencia y se encuentran completamente en un lado de la gráfica cerca del punto de tangencia, excepto en un punto de inflexión.

Si la curva es cóncava hacia arriba en el punto de tangencia, la recta tangente se encuentra debajo de la curva cerca del punto de tangencia (fig. izquierda). Si la curva es cóncava hacia abajo en el punto de tangencia, la recta tangente se encuentra encima de la curva cerca del punto de tangencia (fig. derecha).



Una excepción a la regla general para rectas tangentes es en los puntos de inflexión En un punto de inflexión, la gráfica es cóncava hacia arriba en un lado y cóncava hacia abajo en el otro. La línea tangente en un punto de inflexión se encuentra encima de la parte cóncava hacia abajo del gráfico y debajo de la parte cóncava hacia arriba; entonces atraviesa el gráfico en el punto de inflexión.

Si nuestra función es, por ejemplo, $f(x) = x^2$, como ya estudiamos su gráfica, sabemos que es decreciente si $x < 0$, y creciente si $x > 0$. Volvamos a graficarla:

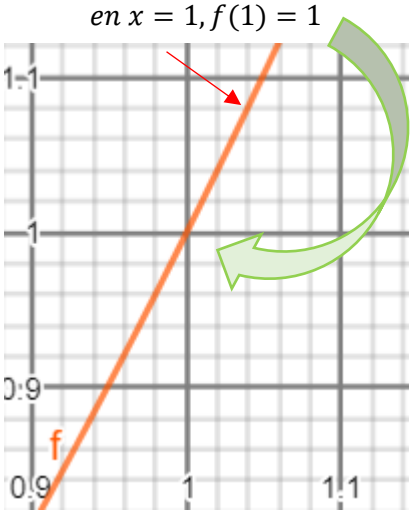


Y si ahora te pregunto ¿Dónde crece más rápido, en $x = 1$ o en $x = 2$?... ¿Qué dirías?… ¿Por qué?...

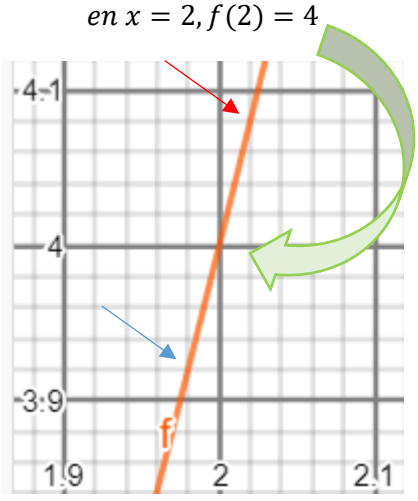
Crece más rápido en $x = 2$, porque esta más "empinada"

Eso que "ves" es cierto. Ahora vamos a medir que tan "empinada" está. Hagamos un acercamiento al gráfico

en $x = 1, f(1) = 1$



en $x = 2, f(2) = 4$



Parecen "rectas", podemos estimar la pendiente de cada una, escojamos puntos "bonitos" y calculemos las pendientes.

Elegimos los puntos (0,96; 0,92) y (1,04; 1,08).

Elegimos los puntos (1,98; 3,92) y (2,02; 4,08).

Calculamos la pendiente de la "recta" entre esos puntos

$$m_{x=1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}08 - 0{,}92}{1{,}04 - 0{,}96} = 2$$

$$m_{x=1} = 2$$

Calculamos la pendiente de la "recta" entre esos puntos

$$m_{x=2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4{,}08 - 3{,}92}{2{,}02 - 1{,}98} = 4$$

$$m_{x=2} = 4$$

Como $2 < 4$, la función crece más rápido en $x = 2$. Tenías razón.

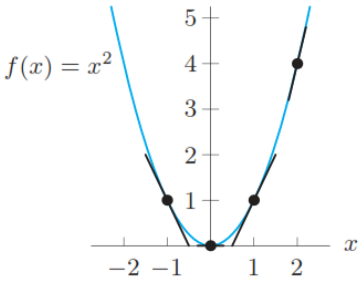
Cuanto más nos acercamos, más recto parece el gráfico. A la pendiente de esta "recta" la llamamos *pendiente de la gráfica* en el punto; también representa la derivada.

La derivada de la función $f(x)$, evaluada en $x = a$, representa:
- La pendiente de la gráfica de la función en $x = a$.
- La pendiente de la recta tangente a la curva en $x = a$.

La interpretación de la pendiente suele ser útil para obtener información aproximada sobre la derivada, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 7: Utilizar la gráfica de $f(x) = x^2$ para determinar si cada una de las siguientes cantidades es positiva, negativa o cero: a) $f'(1)$ b) $f'(-1)$ c) $f'(2)$ d) $f'(0)$

Solución: La figura muestra segmentos de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = x^2$ en los puntos pedidos. Como la derivada es la pendiente de la recta tangente en el punto, tenemos



a) $f'(1)$ es positiva.
b) $f'(-1)$ es negativa.
c) $f'(2)$ es positiva.
d) $f'(0) = 0$ ya que la gráfica tiene tangente horizontal en $x = 0$. ■

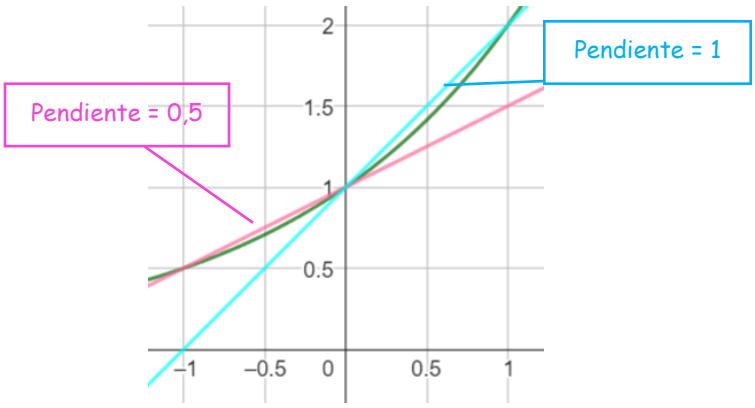
Tasas de cambio: notación e interpretación

Para comunicar eficazmente medidas de cambio, es importante comprender la representación verbal de esas medidas, así como la notación que se utiliza en su representación algebraica. El siguiente cuadro resume las diferencias entre tasas de cambio promedio y tasas de cambio.

Tasa de cambio promedio	**versus**	**Tasa de cambio (instantánea)**
• mide la rapidez (en promedio) con la que cambia una cantidad durante un intervalo		• mide la rapidez con la que una cantidad cambia en un punto
• se puede obtener calculando la pendiente de la recta secante entre dos puntos (como cuando calculamos $m_{x=a}$)		• se puede obtener calculando la pendiente de la recta tangente en un único punto en una gráfica continua y suave
• requiere dos puntos		• requiere una función continua y suave

Ejemplo 8: Estimar la derivada de $f(x) = 2^x$ en $x = 0$ gráfica y analíticamente.

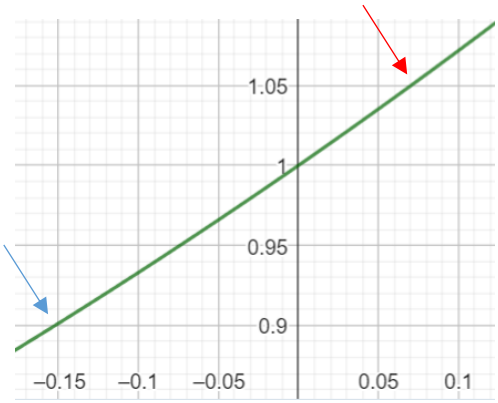
Solución: Gráficamente: Vamos al geogebra, y dibujemos rectas secantes antes y después de $x = 0$, vemos que la pendiente que buscamos debe estar entre 0,5 y 1.



Hagamos zoom

elegimos dos puntos $(-0{,}15;\ 0{,}9)$ y $(0{,}07;\ 1{,}05)$ y calculamos

$$m_{x=0} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}05 - 0{,}9}{0{,}07 - (-0{,}15)} \approx 0{,}68$$



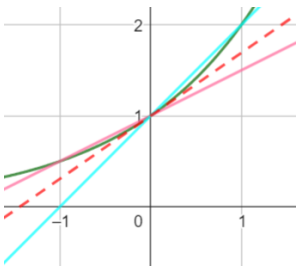
Nos estamos acercando.

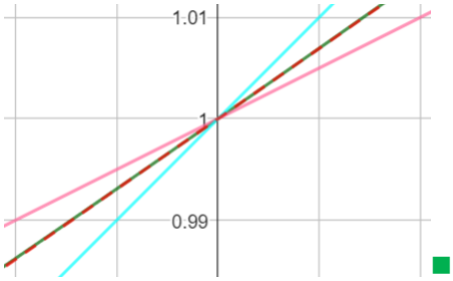
Numéricamente: Para estimar la derivada en $x = 0$, calculamos la razón de cambio promedio sobre un intervalo cercano a cero:

$$\text{Razón de cambio promedio sobre } 0 \le x \le 0{,}0001 \quad = \frac{2^{0{,}0001} - 2^0}{0{,}0001 - 0} = \frac{1{,}000069317 - 1}{0{,}0001} = 0{,}69317$$

Dado que el uso de intervalos más pequeños da aproximadamente los mismos valores, parece que la derivada es aproximadamente 0,69317; es decir, $f'(0) \approx 0{,}693$.

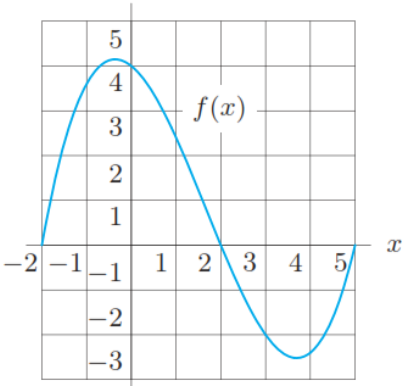
Graficamente, la línea de puntos es la recta tangente, en la figura de la derecha realizamos un zoom, observa como la curva (verde) y la recta tangente (punteada roja) se superponen.



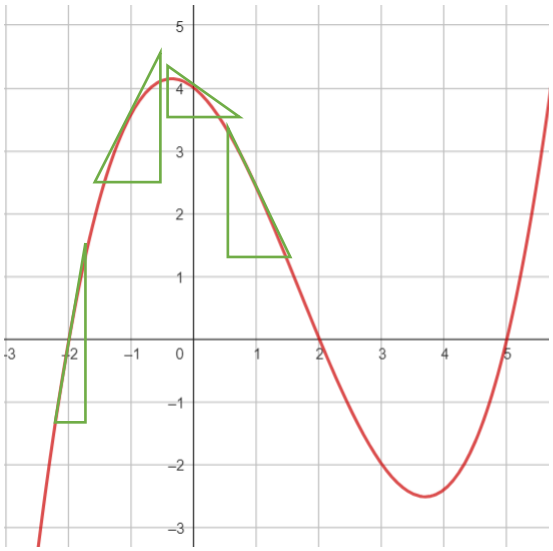


Encontrar la derivada de una función dada gráficamente

Ejemplo 9: Estimar la derivada de la función $f(x)$ graficada en la figura en $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



A partir de la gráfica, estimamos la derivada en cualquier punto colocando una regla de modo que forme la línea tangente en ese punto y luego usando la cuadrícula para estimar la pendiente de la línea tangente. Por ejemplo, dibujamos la tangente en $x = -1$ en la siguiente figura y tiene una pendiente de aproximadamente 2, por lo que $f'(-1) \approx 2$.



Observemos que la pendiente en $x = -2$ es positiva y bastante grande; la pendiente en $x = -1$ es positiva pero menor. En $x = 0$, la pendiente es negativa, en $x = 1$ se ha vuelto más negativa, y así sucesivamente. En la tabla siguiente enumeramos algunas estimaciones de la derivada, al número entero más cercano. Deberías comprobar estos valores tú mismo. ¿La derivada es positiva donde esperabas? ¿Negativa?

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
derivada en x	6	2	-1	-2	-2	-1	1	4

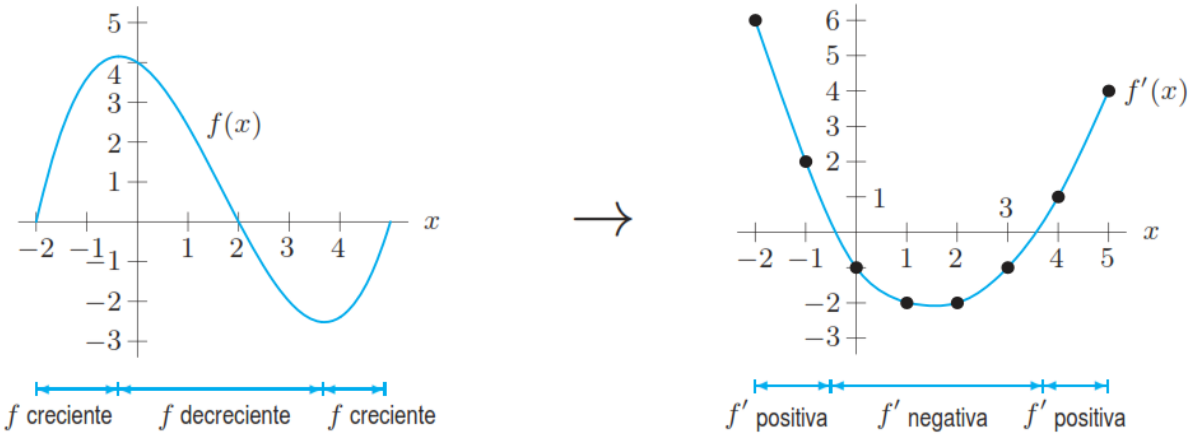
■

Hasta ahora hemos calculado la derivada de una función (o, equivalentemente, la pendiente de la recta tangente) en un punto fijo de una curva. Si este punto se mueve a lo largo de la curva, la tangente también se mueve y, en general, su pendiente cambia. Por esta razón, la pendiente de la recta tangente de la función f es en sí misma una función, llamada derivada de f. El punto importante a tener en cuenta es que para cada valor de x, existe un valor correspondiente de la derivada. La derivada, por lo tanto, es función de x.

Para una función f, definimos la *función derivada*, f', por
$f'(x) =$ Tasa de cambio instantánea de f en x.

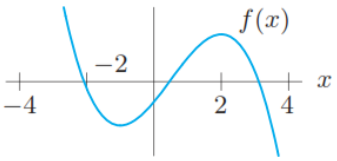
Ejemplo 10: Graficar los valores de la función derivada calculada en el ejemplo 9. Comparar las gráficas de f y f'.

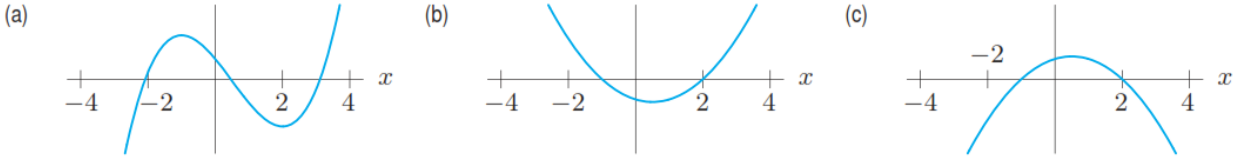
Solución Las gráficas de f y f' se encuentran en la figura.



Observemos que f' es positiva (su gráfica está por encima del eje x) donde f crece, y f' es negativa (su gráfica está por debajo del eje x) donde f decrece. El valor de $f'(x)$ es 0 donde f tiene un valor máximo o mínimo (aproximadamente en $x = -0{,}4$ y $x = 3{,}7$).■

Ejemplo 11: Dada la siguiente gráfica de la función f. ¿Cuál de las gráficas a) – c) es la gráfica de la derivada, f'?





Solución: Dado que la tangente de $f(x)$ es horizontal en $x = -1$ y $x = 2$, la derivada es cero ahí. Por lo tanto, la gráfica de $f'(x)$ tiene que cortar al eje x en $x = -1$ y $x = 2$. La función f es decreciente para $x < -1$, creciente para $-1 < x < 2$ y decreciente para $x > 2$. La derivada es positiva (su gráfica está por encima del eje x) donde f crece, y la derivada es negativa (su gráfica está por debajo del eje x) donde f decrece. La gráfica correcta es (c).■

¿Qué nos dice gráficamente la derivada?

Cuando la derivada, f', de una función es positiva, la tangente a la gráfica de f tiene pendiente ascendente; donde f' es negativa, la tangente tiene pendiente descendente. Si $f' = 0$ en todo punto, entonces la tangente es horizontal en todo punto y por lo tanto f es constante. El signo de la derivada f' nos dice si la función f es creciente o decreciente.

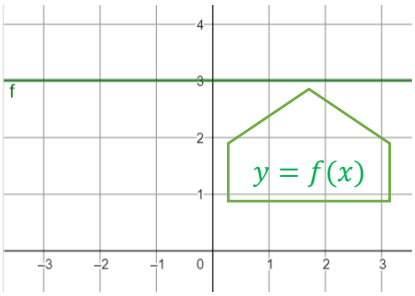
Si $f' > 0$ en un intervalo, entonces f es *creciente* en ese intervalo.
Si $f' < 0$ en un intervalo, entonces f es *decreciente* en ese intervalo.
Si $f' = 0$ en un intervalo, entonces f es *constante* en ese intervalo.

La magnitud de la derivada nos da la magnitud de la tasa de cambio de f. Si f' es grande en magnitud, entonces la gráfica de f es pronunciada (hacia arriba si f' es positiva o hacia abajo si f' es negativa); si f' tiene una magnitud pequeña, la gráfica de f tiene una pendiente suave.

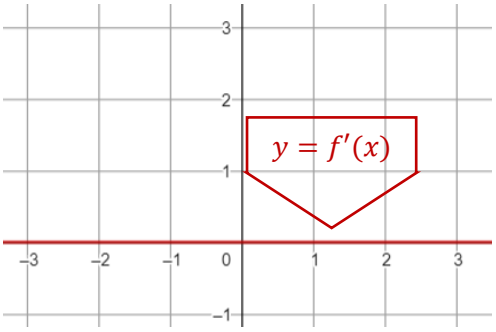
CÓMO DERIVAR UNA FUNCIÓN POR MEDIO DE SU GRÁFICA

Ahora aprenderemos a obtener la gráfica de la derivada de una función. Ya conociendo la gráfica de la función original, analizaremos su comportamiento para deducir las características que debe tener la gráfica de la derivada. Iniciaremos con un ejemplo muy sencillo.

Ejemplo 12 Tracemos la gráfica de la derivada de la función que aparece a continuación.

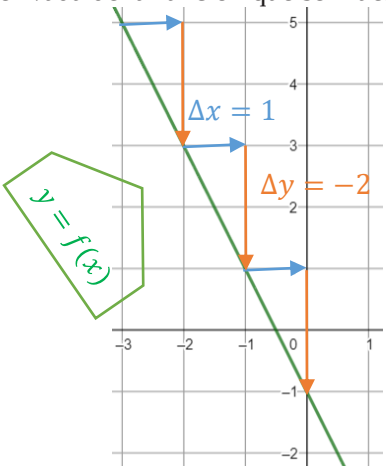


Solución Recordemos que la derivada de una función en un punto está dada por la pendiente de la recta tangente en ese punto, por lo que primero debemos encontrar el valor de la pendiente en cada punto de la función dada. En este caso, como la **función es constante,** $f(x) = 3$, es obvio que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto es cero, por lo que podemos concluir que *la derivada de la función dada vale cero en todo punto.*
Para trazar la gráfica de la derivada, en cada valor de *x* marcaremos como altura el valor de la pendiente, que en este ejemplo siempre será cero. Entonces, la gráfica de la derivada quedaría como sigue:



CONCLUSIÓN: En general, podemos decir que la derivada de cualquier función constante siempre vale cero.

Ejemplo 13 Traza la gráfica de la derivada de la función que se muestra a continuación.

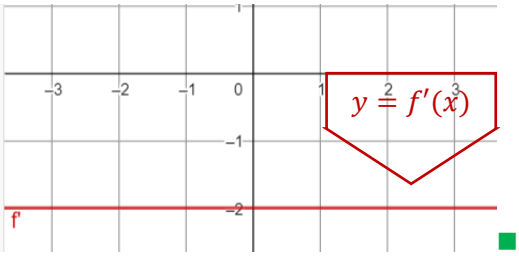


Solución: Nuevamente, para obtener la derivada en un punto tenemos que encontrar la pendiente de la recta tangente en ese punto. Como en este caso la función dada es una recta, sabemos que una de las características de las rectas es que en todo punto su pendiente es la misma. Observa que cuando la variable *x* aumenta una unidad, la altura de la función disminuye dos unidades, es decir la pendiente de la recta en cualquier punto es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$$

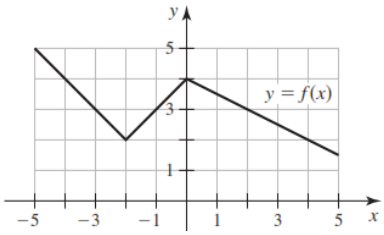
por lo que podemos concluir que la derivada de la función dada, en cualquier punto vale -2.

Para trazar la gráfica de la derivada, en cada valor de x marcaremos como altura el valor de la pendiente, que en este ejemplo siempre será -2 y la gráfica es la siguiente:

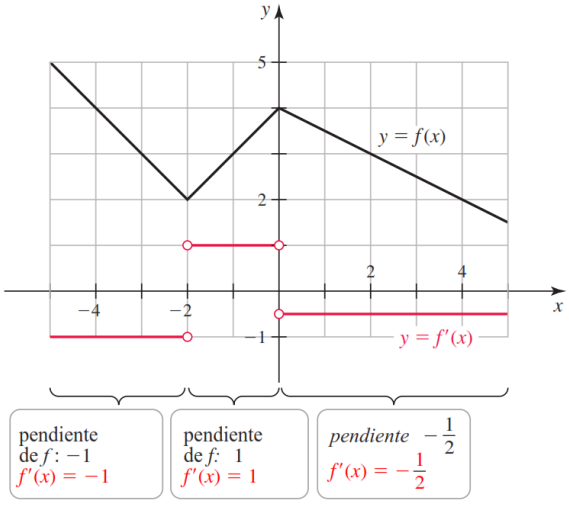


En los ejemplos anteriores, la derivada tiene el mismo valor en todo punto debido a que las funciones dadas eran rectas; sin embargo, esto no se cumple para todas las funciones. En general, la derivada tiene valores diferentes en cada punto.

Ejemplo 14: Dibujar la gráfica de f' desde la gráfica de f.

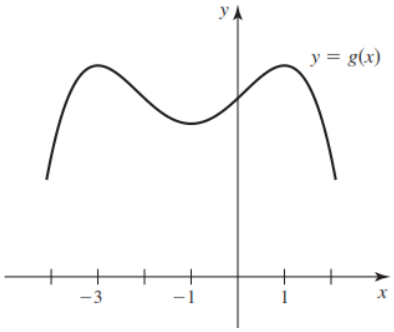


Solución: La gráfica de f consta de segmentos, los cuales son sus propias rectas tangentes. Por lo tanto, la pendiente de la curva $y = f(x)$, para $x < -2$, es -1; es decir, $f'(x) = -1$ para $x < -2$. Similarmente, $f'(x) = 1$, para $-2 < x < 0$, y $f'(x) = -1/2$, para $x > 0$. La siguiente figura muestra la gráfica de f en negro, y la gráfica de f' en rojo.



Observemos que las pendientes de las rectas tangentes cambian abruptamente en $x = -2$ y $x = 0$. Como resultado, $f'(-2)$ y $f'(0)$ no están definidas y la gráfica de la derivada tiene una discontinuidad en estos puntos. ■

Ejemplo 15: Dibujar la gráfica de g' utilizando la gráfica de g de la figura.

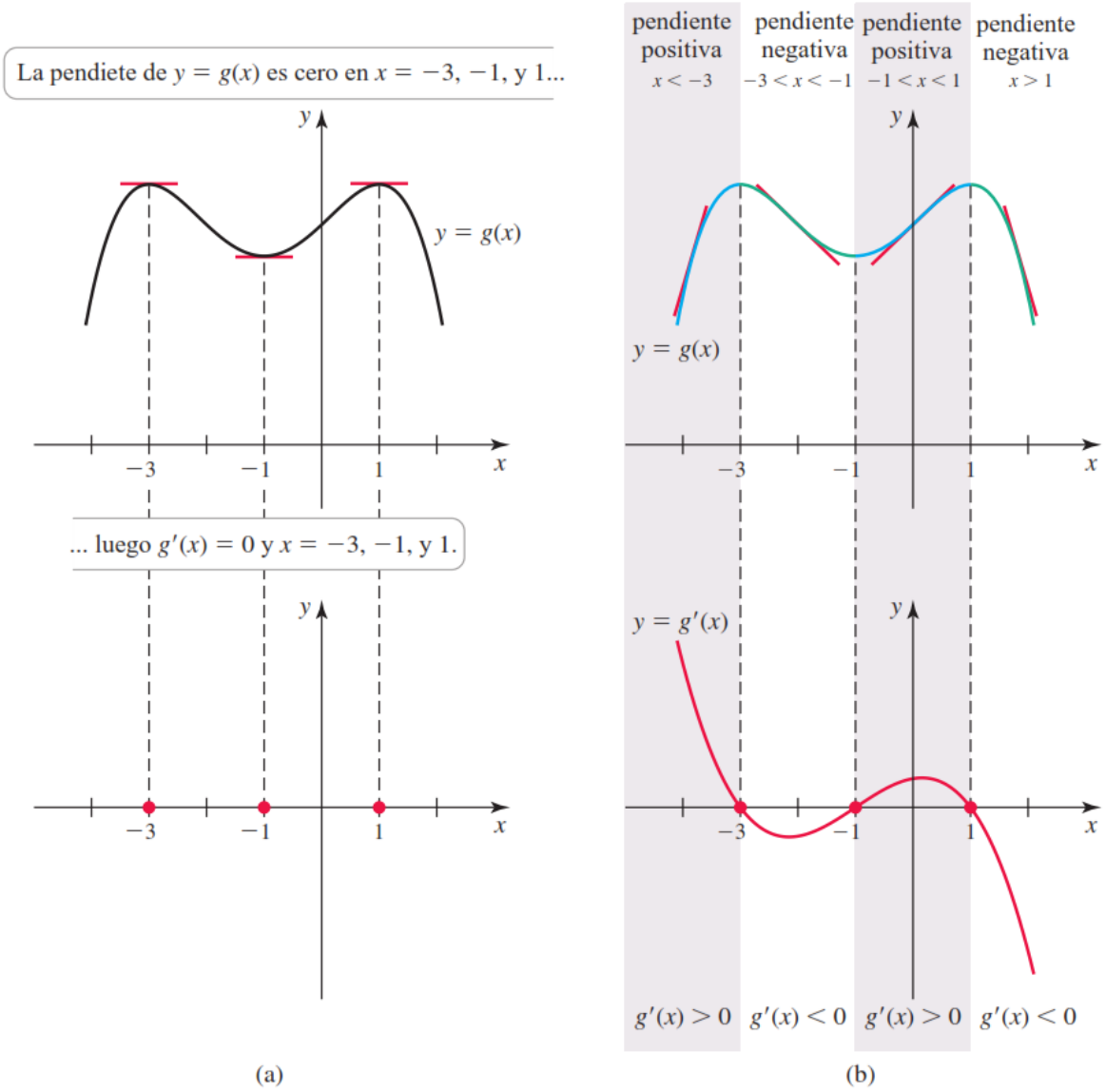


Solución: Sin una ecuación para g, lo mejor que podemos hacer es encontrar la forma general de la gráfica de g'. Aquí están las observaciones clave.

1. Observemos que las rectas tangentes a la gráfica de g en $x = -3, -1$ y 1, tienen pendiente cero. Por lo tanto,

$$g'(-3) = g'(-1) = g'(1) = 0,$$

lo que nos dice que la gráfica de g' corta al eje x en esos valores. Siguiente figura (a).



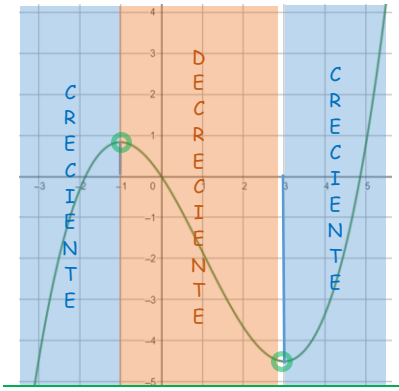
2. Para $x < -3$, las pendientes de las rectas tangentes son positivas y decrecen a cero cuando x se aproxima a -3.
3. Para $-3 < x < -1, g'(x)$ es negativa; inicialmente decrece cuando x crece y entonces regresa a 0 en $x = 1$.
4. Finalmente, $g'(x)$ es negativa y decreciente para $x > 1$. Porque la pendiente de g cambia gradualmente, la gráfica de g' es continua y sin saltos y quiebres. Figura (b).■

Como ya dijimos, en cada punto de una función sólo puede haber una pendiente, esto implica que en cada punto de una función sólo puede haber una derivada; por lo tanto, la derivada de una función es también una función.
Como $f'(x)$ es una función, entonces es posible obtener su derivada $[f'(x)]'$, y a ésta le llamaremos ***segunda derivada*** de *f*. En forma similar, es posible obtener la tercera derivada, cuarta derivada, etcétera.
La segunda derivada de la función $f(x)$ se denota como $f''(x)$, y se obtiene derivando $f'(x)$.
Observa que en el ejemplo anterior relacionamos el concepto de derivada con el comportamiento de la función: creciente o decreciente. Con la segunda derivada podemos determinar si la concavidad de la función *f*, es hacia arriba o hacia abajo. Conocer la concavidad es importante, pues nos indica cómo cambia la función, si lo hace rápida o lentamente; esto es de gran utilidad sobre todo cuando la función representa alguna situación de la vida real, por ejemplo, una población, la demanda de un artículo, etcétera. Más adelante conocerás aplicaciones de concavidad.

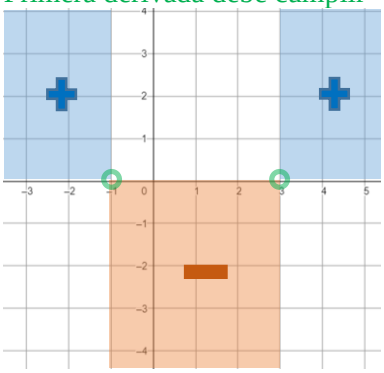
Para deducir la concavidad de una curva por medio de la segunda derivada, resolveremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16: Dibujar la gráfica de la primera y segunda derivada de la función dada en la siguiente gráfica.

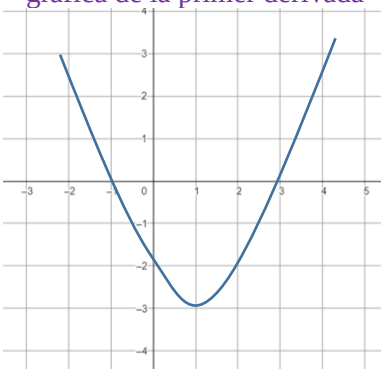
Función



Primera derivada debe cumplir



gráfica de la primer derivada

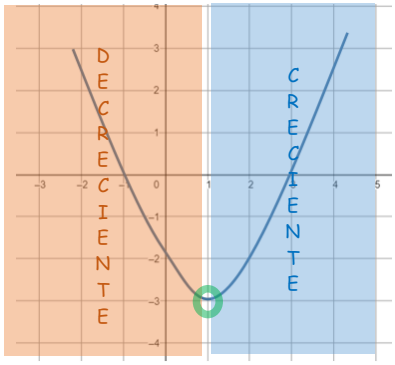


En palabras

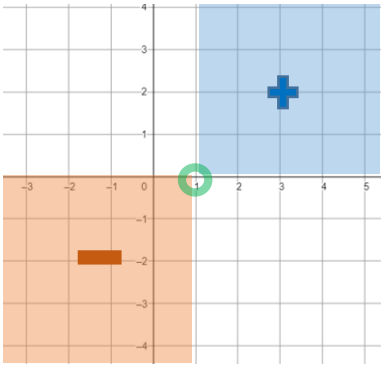
f es creciente para $x < -1$	$f' > 0$ para $x < -1$
f es decreciente para $-1 < x < 3$	$f' < 0$ para $-1 < x < 3$
f es creciente para $x > 1$	$f' > 0$ para $x > 3$
f tiene un máximo en $x = -1$	$f' = 0$ en $x = -1$, y pasa de + a −
f tien un mínimo en $x = 3$	$f' = 0$ en $x = 3$, y pasa de – a +

Ahora miremos la función derivada y realicemos un análisis similar

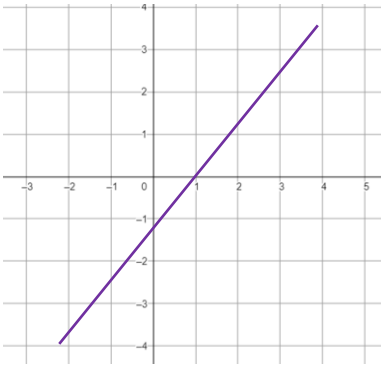
función primer derivada



la segunda derivada debe cumplir



gráfica de la segunda derivada



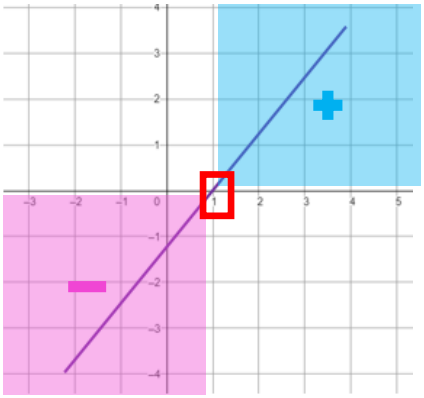
f' es creciente para $x > 1$	$f'' > 0$ para $x > 1$
f' es decreciente para $x < 1$	$f'' < 0$ para $x < 1$
f' tiene un mínimo	$f'' = 0$ en $x = 1$ y cambia de signo.

Ahora comparemos la función y la segunda derivada

función



segunda derivada



En palabras

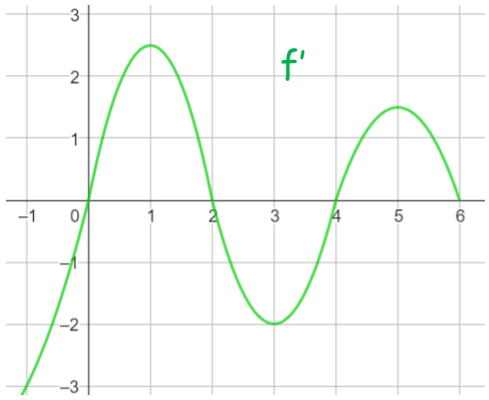
f es cóncava hacia abajo para $x < 1$	$f'' < 0$ para $x < 1$
f es cóncava hacia arriba para $x > 1$	$f'' > 0$ para $x > 1$
f tiene un punto de inflexión en $x = 1$	$f'' = 0$ en $x = 1$ y cambia de signo.
f tiene un máximo en $x = -1$	$f''(-1) < 0$
f tien un mínimo en $x = 3$	$f''(3) > 0$

Juntamos todo

la función	la primer deridada	la segunda derivada
f es creciente para $x < -1$	$f' > 0$ para $x < -1$	
f es decreciente para $-1 < x < 3$	$f' < 0$ para $-1 < x < 3$	
f es creciente para $x > 1$	$f' > 0$ para $x > 3$	
f tiene un máximo en $x = -1$	$f' = 0$ en $x = -1$, y pasa de + a −	$f''(-1) < 0$
f tien un mínimo en $x = 3$	$f' = 0$ en $x = 3$, y pasa de – a +	$f''(3) > 0$
f es cóncava hacia abajo para $x < 1$	f' es creciente para $x < 1$	$f'' < 0$ para $x < 1$
f es cóncava hacia arriba para $x > 1$	f' es decreciente para $x > 1$	$f'' > 0$ para $x > 1$
f tiene un punto de inflexión en $x = 1$	f' tiene un mínimo	$f'' = 0$ en $x = 1$ y cambia de signo.

¿Qué me dice la función derivada de la función? ¿Qué me dice f' de f?

Ejemplo 17: Dada la gráfica de f', ¿qué información tenemos de la función f?



☞ f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 4)$, porque f' es negativa.

☞ f es creciente en $(0, 2) \cup (4, 6)$, porque f' es positiva.

☞ f tiene un mínimo local en $x = 0$, y en $x = 4$, porque $f'(0) = f'(4) = 0$ y pasa de negativa a positiva.

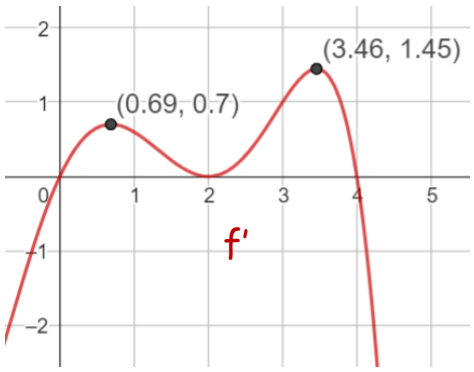
☞ f tiene un máximo local en $x = 2$, porque $f'(2) = 0$ y pasa de positiva a negativa.

☞ f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1) \cup (3, 5)$, porque f' es creciente.

☞ f es cóncava hacia abajo en $(1, 3) \cup (5, 6)$, porque f' es decreciente.

☞ f tiene puntos de inflexión en $x = 1, x = 3$ y $x = 5$, porque f' tiene máximos o mínimos.■

Ejemplo 18: Dada la gráfica de f', ¿qué información tenemos de la función f?



☞ f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, porque f' es negativa.

☞ f es creciente en $(0, 2) \cup (2, 4)$, porque f' es positiva.

☞ f tiene un mínimo local en $x = 0$, porque $f'(0) = 0$ y pasa de negativa a positiva.

☞ f tiene un máximo local en $x = 4$, porque $f'(4) = 0$ y pasa de positiva a negativa.

☞ f **no** tiene un extremo local en $x = 2$, porque, aun cuando $f'(2) = 0$, no cambia de signo.

☞f es cóncava hacia arriba en $(-\infty; 0{,}69) \cup (2; 3{,}46)$, porque f' es creciente.

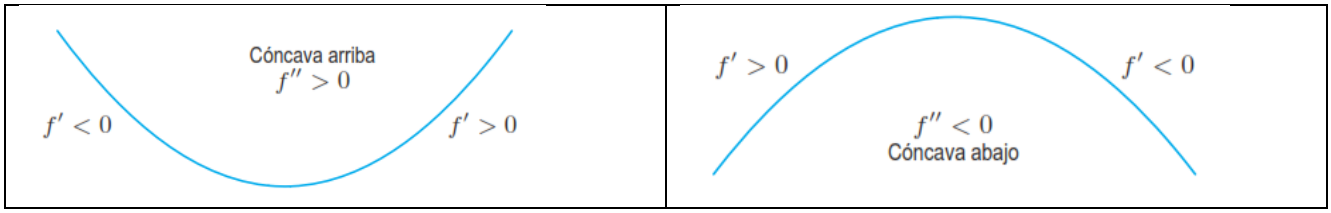
☞f es cóncava hacia abajo en $(0{,}69; 2) \cup (3{,}46; \infty)$, porque f' es decreciente.

☞ f tiene puntos de inflexión en $x = 0{,}69, x = 2$ y $x = 3{,}46$, porque f' tiene máximos o mínimos.■

¡Resumamos lo aprendido con los ejemplos anteriores!

$f(x)$ FUNCIÓN	$f'(x)$ PRIMERA DERIVADA	$f''(x)$ SEGUNDA DERIVADA
creciente	positiva	
decreciente	negativa	
cóncava hacia arriba	creciente	positiva
cóncava hacia abajo	decreciente	negativa
máximo local	cero y cambia de positiva a negativa	$f''< 0$
mínimo local	cero y cambia de negativa a positiva	$f''> 0$
punto de inflexión	máximo o mínimo local	cero y cambia de signo

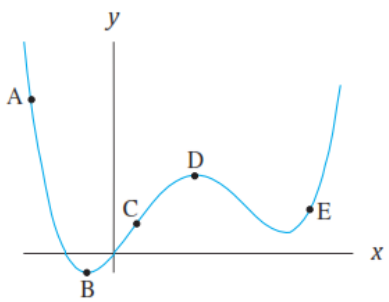
Algunos gráficos que nos pueden ayudar



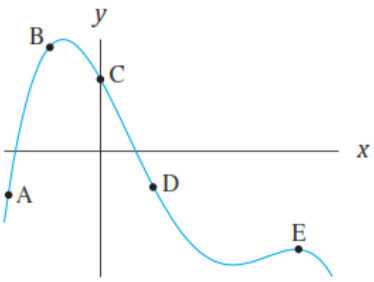
EJERCICIOS

Utilizar las figuras para responder las preguntas

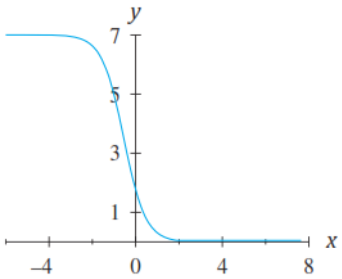
1)



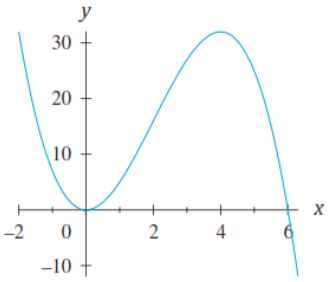
a. En cada punto marcado en la gráfica, identificar si la tasa de cambio instantánea es positiva, negativa o cero.
b. ¿La gráfica es más inclinada en el punto C o en el punto E?
c. ¿La gráfica es más inclinada en el punto A o en el punto C?

2) 

a. En cada punto marcado en la gráfica, identificar si la tasa de cambio instantánea es positiva, negativa o cero.
b. ¿La gráfica es más inclinada en el punto C o en el punto D?
c. ¿La gráfica es más inclinada en el punto A o en el punto C?

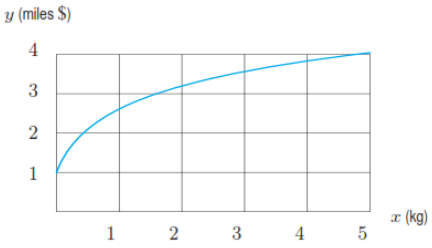
3) 

a. ¿En qué intervalo(s) la función crece?
b. ¿En qué intervalo(s) la función decrece?
c. Estimar dónde la función está decreciendo más rápidamente.

4) 

a. ¿En qué intervalo(s) la función crece?
b. ¿En qué intervalo(s) la función decrece?
c. Estimar dónde la pendiente es mayor.

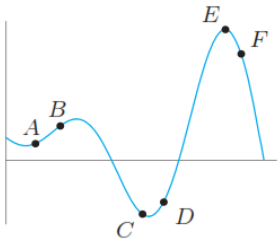
5) La figura muestra el costo, $y = f(x)$, de fabricar x kilogramos de una sustancia química.
(a) ¿La tasa de cambio promedio del costo es mayor entre $x = 0$ y $x = 3$, o entre $x = 3$ y $x = 5$? Explica tu respuesta gráficamente.
(b) ¿Es la tasa de cambio instantánea del costo de producir x kilogramos mayor en $x = 1$ o en $x = 4$? Explica tu respuesta gráficamente.
(c) ¿Cuáles son las unidades de estas tasas de cambio?



6) El tamaño, S, de un tumor (milímetros cúbicos) está dado por $S = 2^t$, donde t es el número de meses desde que se descubrió el tumor. Dar unidades con las respuestas.
(a) ¿Cuál es el cambio total en el tamaño del tumor durante los primeros seis meses?
(b) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio en el tamaño del tumor durante los primeros seis meses?
(c) Calcular la velocidad a la que crece el tumor en $t = 6$. (Utilizar intervalos cada vez más pequeños).

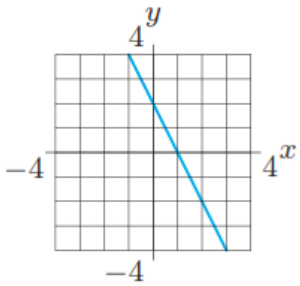
7) Hacer coincidir los puntos marcados sobre la curva de la figura, con las pendientes dadas.

Slope	Point
−3	
−1	
0	
1/2	
1	
2	

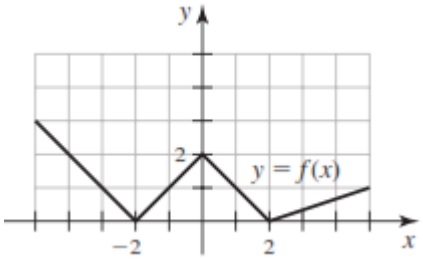


8) Graficar la derivada de las funciones dadas

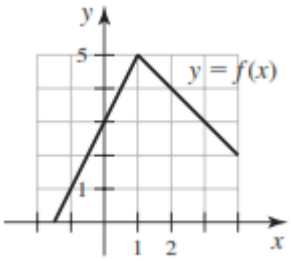
a)



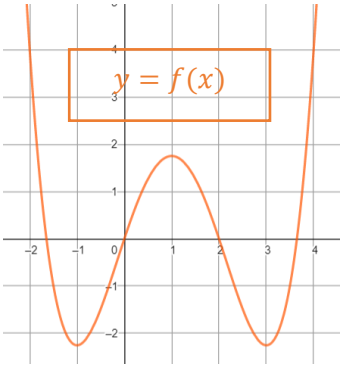
b)

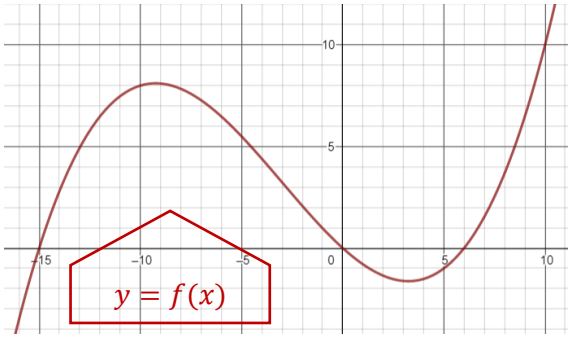


c)

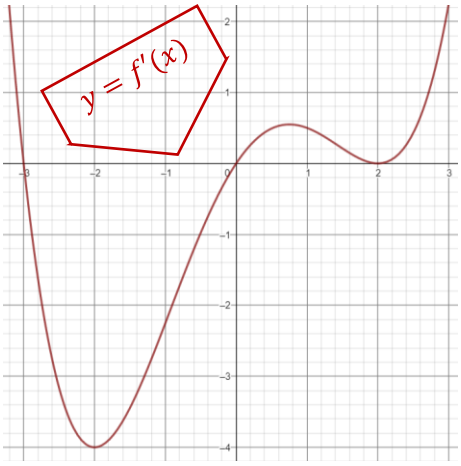


9) Dibujar la gráfica de $f'(x)$ y $f''(x)$, para las funciones





10) Dada la gráfica de la **derivada**, contesta lo que se te pide con respecto a la función original.



a) En qué intervalos $f(x)$ es creciente

b) En qué intervalos $f(x)$ es decreciente

c) En qué intervalos $f(x)$ es cóncava hacia arriba

d) En qué intervalos $f(x)$ es cóncava hacia abajo

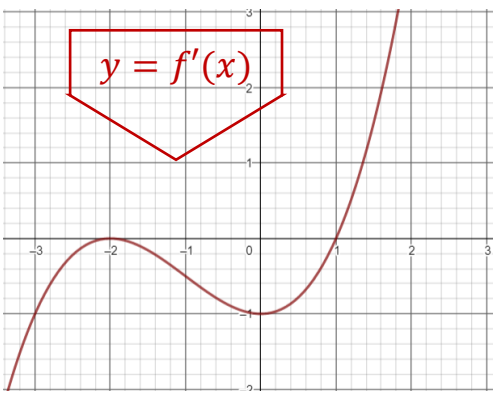
e) Para cuales valores de x, $f(x)$ tiene un máximo/mínimo

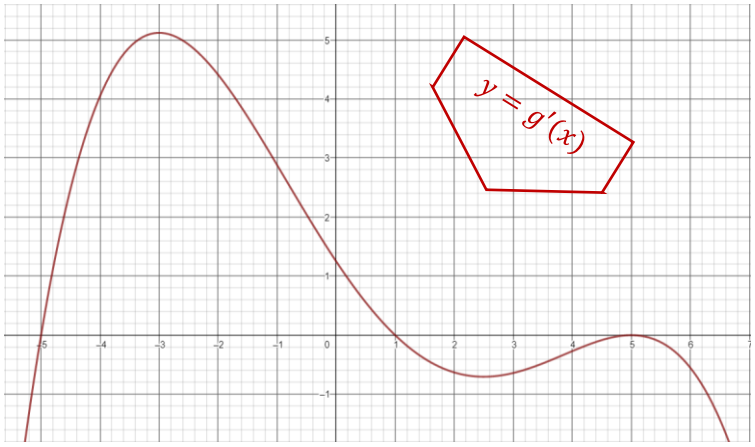
f) En $x = 2$ ¿hay un máximo o mínimo de $f(x)$? ¿Por qué?

g) Para cuales valores de x,$f(x)$ tiene un punto de inflexión.

11) Dada la gráfica de **la derivada de una función** obtén la siguiente información de la función original.

a) Intervalos donde *la función* crece.
b) Intervalos donde *la función* decrece.
c) Intervalos donde *la función* es cóncava hacia arriba.
d) Intervalos donde *la función* es cóncava hacia abajo.
e) Máximos y mínimos de *la función*.
f) Puntos de inflexión de *la función*.





12) Dibujar una posible gráfica de $y = f(x)$ dada la siguiente información sobre su derivada.

a)

- $f'(x) > 0 \; para \; x < -1.$
- $f'(x) < 0 \; para \; x > -1.$
- $f'(x) = 0 \; para \; x = -1.$

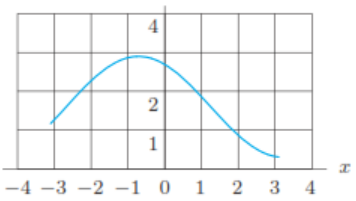
b)

- $f'(x) > 0 \; para \; 1 < x < 3.$
- $f'(x) < 0 \; para \; x < 1 \; y \; x > 3.$
- $f'(x) = 0 \; para \; x = 1 \; y \; x = 3.$

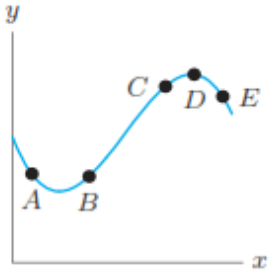
13) Para la función $g(x)$ graficada en la figura ¿las siguientes cantidades son positivas o negativas?

a) $g'(0)$

b) $g''(0)$



14) Para cada uno de los siguientes puntos, dar los signos de la primera y segunda derivada.



15) Potencia y energía La energía es la capacidad de realizar trabajo y la potencia es la tasa a la que se utiliza o consume la energía. Por lo tanto, si $E(t)$ es la función de energía de un sistema, entonces $P(t) = E'(t)$ es la función de potencia. Una unidad de energía es el kilovatio-hora (1 kWh es la cantidad de energía necesaria para encender diez bombillas de 100 W durante una hora); las unidades correspondientes a la potencia son kilovatios. La siguiente figura muestra la función de demanda de energía para una pequeña comunidad durante un período de 25 horas.

a. Estimar la potencia en $t = 10$ y $t = 20$ h. Asegúrarse de incluir unidades en el cálculo.

b. ¿En qué momentos del intervalo $[0, 25]$ la potencia es cero?

c. ¿En qué momentos del intervalo $[0, 25]$ la potencia es máxima?

