PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES POTENCIA

Proporcionalidad: Una relación funcional ocurre comúnmente cuando una cantidad es *proporcional* a otra. Por ejemplo, si las mandarinas están a 1,40 el kilo, decimos que el precio que debemos pagar, p pesos, es proporcional al peso que compremos, w kilos, porque

$$p = f(w) = 1{,}40w$$

Otro ejemplo, el área, A, de un círculo, es proporcional al cuadrado del radio, r:

$$A = f(r) = \pi r^2.$$

Decimos que y es (directamente) **proporcional** a x si existe una constante, no nula, k, tal que

$$y = kx$$

Esta k se llama constante de proporcionalidad.

También decimos que una cantidad es *inversamente proporcional* a otra si una es proporcional al recíproco de la otra. Por ejemplo, la rapidez, v, a la cual recorremos un trayecto de 50 km es inversamente proporcional al tiempo, t, empleado, porque v es proporcional a $1/t$:

$$v = 50\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{50}{t}.$$

Observemos que si y es directamente proporcional a x, entonces la magnitud de una variable aumenta (disminuye) cuando la magnitud de la otra aumenta (disminuye). Sin embargo, sí y es inversamente proporcional a x, entonces la magnitud de una variable aumenta cuando la magnitud de la otra disminuye.

Ejemplo 1: La masa del corazón de un mamífero es proporcional a su masa corporal.
a) Escribir una fórmula para la masa de corazón, H, como función de la masa corporal, B.
b) Un humano con una masa corporal de 70 kilogramos tiene un corazón cuya masa es de 0,42 kilogramos. Utilizar esta información para encontrar la constante de proporcionalidad.
c) Estimar la masa del corazón de un caballo, cuya masa corporal es de 650 kg.

Solución:
a) Como H es proporcional a B, tenemos que

$$H = kB$$

para alguna constante k.

b) Si utilizamos los datos que $H = 0{,}42$ cuando $B = 70$, podemos despejar k:

$$\begin{aligned} H &= kB \\ 0{,}42 &= k(70) \\ k &= \frac{0{,}42}{70} = 0{,}006 \end{aligned}$$

c) Ya que $k = 0{,}006$, tenemos que $H = 0{,}006\,B$, luego la masa del corazón del caballo está dada por

$$H = 0{,}006\ (650) = 3{,}9\ kilogramos.$$ ■

Ejemplo 2: El período de un péndulo, T, es la cantidad de tiempo necesaria para que el péndulo realice una oscilación completa. Para oscilaciones pequeñas, el período T es aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del péndulo, l. Entonces

$$T = k\sqrt{l} \quad \text{donde } k \text{ es una constante.}$$

Observemos que T no es directamente proporcional a l, sino que T es proporcional a $\sqrt{l}$. ■

Ejemplo 3: El peso de un objeto, w, es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia, r, desde el centro de la Tierra. Entonces, para alguna constante k,

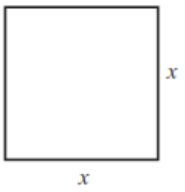
$$w = \frac{k}{r^2}$$

Aquí w no es inversamente proporcional a r, sino a r^2. ■jjjn

Funciones Potencia

El tipo de función que estudiaremos en esta sección se conoce como función potencia, en algunas ocasiones ya la hemos utilizado, tal vez sin saber que se trataba de esta función. El comportamiento de una función potencia está principalmente determinado por el exponente de la variable independiente.

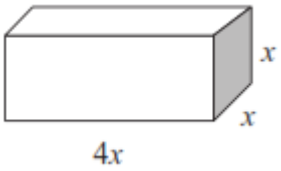
Por ejemplo,



➥Cuando calculamos el área de un terreno cuadrado cuyo lado mide *x*.

Éste es un problema muy fácil de resolver, ya que el terreno es de la siguiente forma y sabemos que el área de un cuadrado es el producto de sus lados entonces $A = x^2$.

La función que representa el área del terreno es llamada *función potencia*, ya que la variable aparece elevada a un número, en este caso el número 2.



➥Si queremos calcular el volumen de la siguiente caja, sabemos que el volumen está dado por $V = (\acute{a}rea\ de\ la\ base) \cdot (altura)$, entonces,

$$V = (4x \cdot x) \cdot x = 4x^3$$

es decir, $V = 4x^3$.

La función representada por el volumen también es una *función potencia*, ya que aparece la variable elevada a un número.

De acuerdo con los ejemplos anteriores, una cantidad es proporcional a la potencia de otra cantidad. Podemos hacer la siguiente definición:

> Decimos que $Q(x)$ es una ***función potencia*** de x si $Q(x)$ *es proporcional a una potencia contante de* x. Si k es la constante de proporcionalidad, y si p es la potencia, entonces
>
> $$Q(x) = k \cdot x^p.$$
>
> (donde el exponente p es cualquier número real y la constante k puede ser cualquier número real $k \neq 0$)

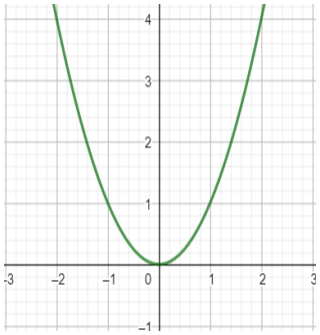
Las constantes k y p caracterizan una *función potencia*, es decir, valores específicos de k y p pertenecen a una única función potencia. En general, constantes con tales propiedades se llaman **parámetros** de una función. Como vemos la función potencia tiene dos parámetros, otra función con dos parámetros que ya vimos es la función lineal, $y = mx + b$, con la pendiente m, y la ordenada b como parámetros.

Por ejemplo, la función $H = 0{,}006B$ es una función potencia con $p = 1$. La función $T = k\sqrt{l} = kl^{1/2}$ es una función potencia con $p = 1/2$, y la función $w = k/r^2 = kr^{-2}$ es una función potencia con $p = -2$.

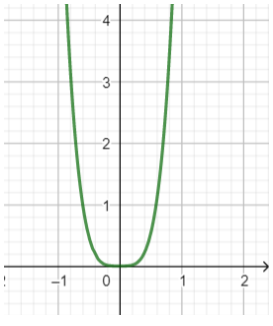
Podemos agrupar las funciones potencia por *familias*, en donde la característica que las distingue es el número al que está elevada la variable independiente; la gráfica de las funciones que pertenecen a una misma familia son muy similares y ésta depende del exponente p.

Por ejemplo: por medio de un software graficadora (por ejemplo, geogebra), dibujaremos la gráfica de algunas familias de funciones:

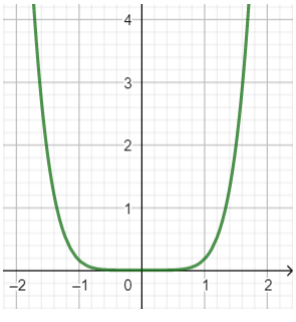
➥ Potencias pares positivas



$y = x^2$

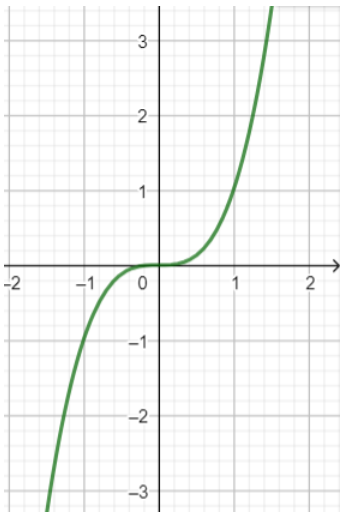


$y = 8x^4$

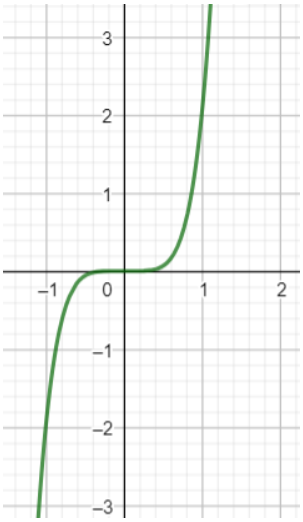


$y = \frac{1}{6}x^6$

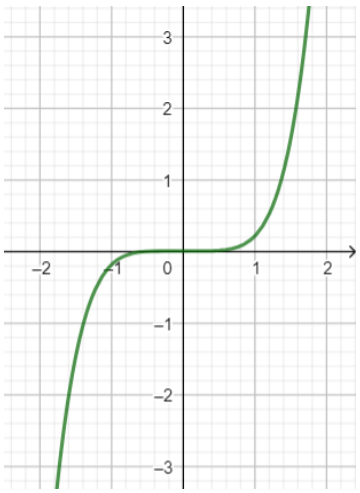
➥ Potencias impares positivas



$y = x^3$

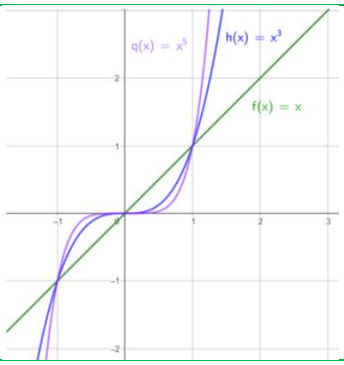
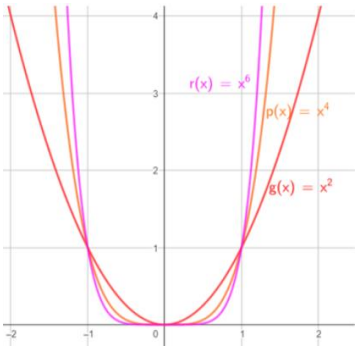


$y = 2x^5$



$y = \frac{1}{5}x^5$

¿Qué observamos?

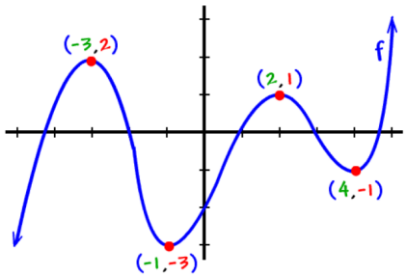
Fórmula	$y = x^{impar}\ \ impar > 1$	$y = x^{par}$
ejemplos		
dominio	todos los reales	
rango	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
función $=\ 0$	en $x = 0$	
pasa por	$(-1,-1), (0,0), (1,1)$	$(-1,1), (0,0), (1,1)$
función > 0	$x > 0$	$x > 0$ o $x < 0$
función < 0	$x < 0$	no
creciente	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(0, \infty)$
decreciente	no	$(-\infty, 0)$
máximos/mínimos	no	mínimo en (0,0)
continua	si	
$x \to \infty$	$función \to \infty$	
$x \to -\infty$	$función \to -\infty$	$función \to \infty$
cóncava hacia arriba	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
cóncava hacia abajo	$(-\infty, 0)$	no
punto de inflexión	en $(0,0)$	no
razón de cambio	positiva	negativa en $(-\infty, 0)$ positiva en $(0, \infty)$
¿cómo cambia la razón?	negativa en $(-\infty, 0)$ positiva en $(0, \infty)$	siempre positiva

Hay palabras nuevas en la tabla:

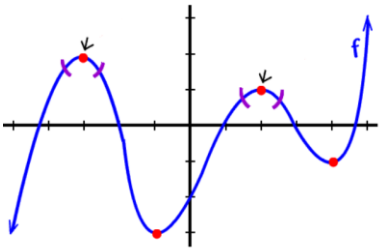
Continua: Desde el punto de vista gráfico, una función es continua en un punto si la gráfica no se separa en ese punto.

Máximos/mínimos: Muchas gráficas están caracterizadas por picos y valles en donde cambian de crecientes a decrecientes y viceversa. Los valores extremos de la función (o *extremos locales*) pueden caracterizarse como *máximos locales* o *mínimos locales*. Éste es otro concepto de funciones que es más fácil ver en forma geométrica que describir algebraicamente. Observemos que un máximo local no tiene que ser *el* máximo de una función, sólo necesita ser el valor máximo de la función en *algún* pequeño intervalo.

Ejemplo: Miremos el siguiente gráfico



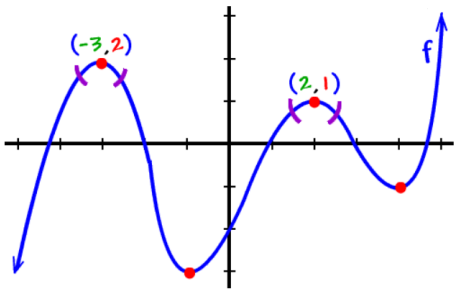
Las cimas de las montañas son **máximos relativos** porque son los *puntos más altos* de sus pequeños vecindarios (en relación con los puntos que las rodean):



Aparte de señalar estas cosas en el gráfico, tenemos una forma muy específica de escribirlas.

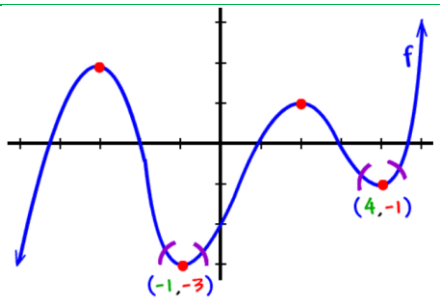
Oficialmente, para este gráfico, diríamos que:
f tiene un **máximo relativo** de 2 en $x = -3$.
f tiene un **máximo relativo** de 1 en $x = 2$.

El máximo es, en realidad, la altura... La x es donde se produce el máximo. Por lo tanto, decir que el máximo es $(-3,\ 2)$ no estaría claro y no sería realmente correcto.



Los **minutos relativos** son los **puntos más bajos** en sus pequeños **entornos**.
f tiene un **mínimo relativo** de -3 en $x = -1$.
f tiene un **mínimo relativo** de -1 en $x = 4$.

También se puede decir
f tiene un **mínimo relativo** en $x = 4$ y vale -1.



(Los extremos relativos (máximos y mínimos) a veces se denominan extremos locales).

DEFINICIÓN Extremos locales y absolutos (globales)

Un **máximo local** de una función f, es un valor $f(c)$ que es mayor o igual a todos los valores del rango de f en algún intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c)$ es mayor o igual que todos los valores del rango de f, entonces $f(c)$ es el valor **máximo absoluto** (o **global**) de f.
Un **mínimo local** de una función f, es un valor $f(c)$ que es menor o igual a todos los valores del rango de f en algún intervalo abierto que contiene a *c*. Si *f*(c) es menor o igual que todos los valores del rango de *f*, entonces $f(c)$ es el valor **mínimo absoluto** (o **global**) de f.
Los extremos locales también se conocen como **extremos relativos**.

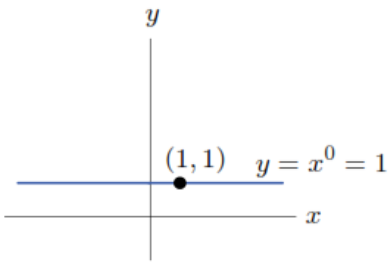
Comportamiento en los extremos: Muestra cómo se comporta la función cuando x se va hacia los "extremos" del eje *x*. Es considerar *lo que* sucede "al alejarse".

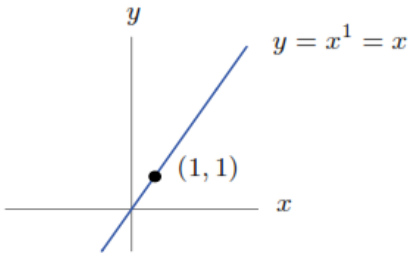
$x \to \infty$	lee "x tiende a infinito"	x toma valores cada vez más grandes
$x \to -\infty$	lee "x tiende a menos infinito"	x toma valores cada vez más negativos
$función \to \infty$	lee "f tiende a infinito"	$f(x)$ toma valores cada vez más grandes
$función \to -\infty$	lee "f tiende a menos infinito"	$f(x)$ toma valores cada vez más negativos

Punto de inflexión: en ese punto, la gráfica cambia de curvatura. Es decir la gráfica muestra un cambio de concavidad.

Los casos especiales: $p = 0$ y $p = 1$

En general, una función potencia no es lineal. Pero si $p = 0$ o $p = 1$, entonces las funciones potencia son lineales. Por ejemplo, la gráfica de $y = x^0 = 1$ es una línea horizontal que pasa por el punto $(1, 1)$. La gráfica de $y = x^1 = x$ es una recta que pasa por el origen con pendiente 1. Gráficamente

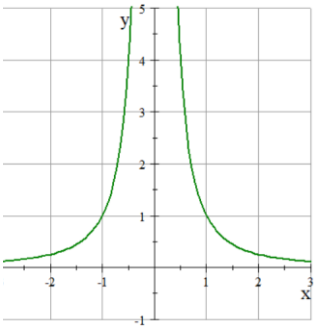




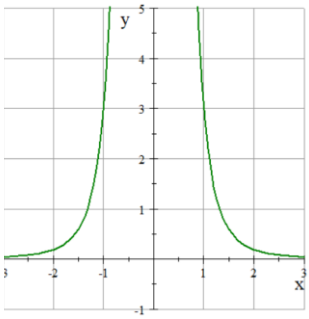
Potencias negativas:

Si $y = kx^{-n} = \frac{k}{x^n}$ con n positivo, decimos que y es inversamente proporcional a x^n .

➥ Potencias *pares* negativas

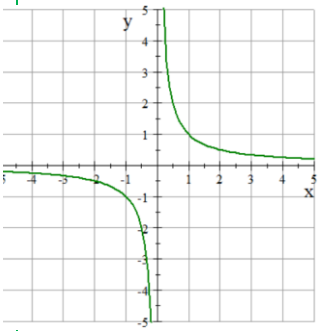


$y = x^{-2}$

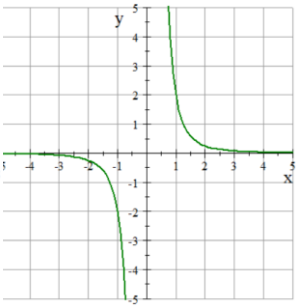


$y = 3x^{-4}$

➥ Potencias *impares* negativas

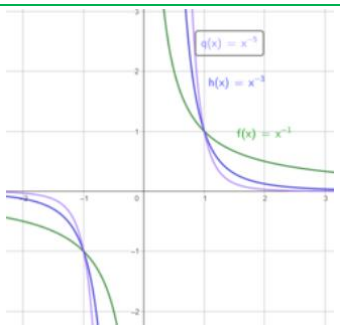
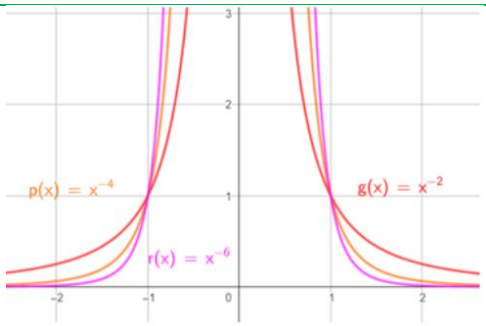


$y = x^{-1}$



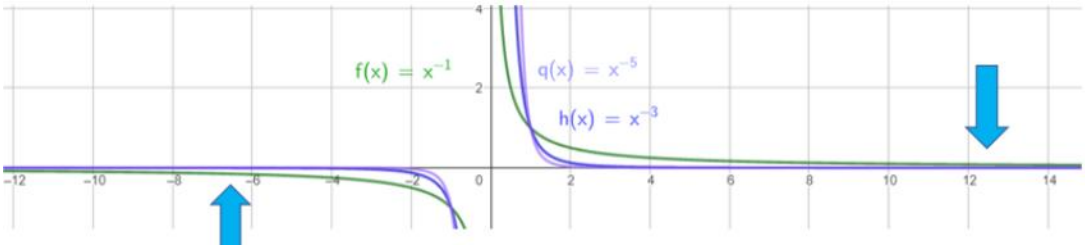
$y = 2x^{-3}$

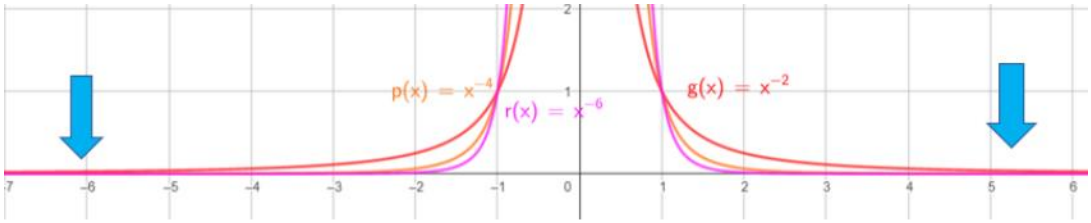
¿Qué observamos?

Fórmula	$y = x^{-impar}$	$y = x^{-par}$
ejemplos		
dominio	todos los reales menos el cero $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	
rango	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(0, \infty)$
función $= 0$	NUNCA	
pasa por	$(-1, -1), (1, 1)$	$(-1, 1), (1, 1)$
función > 0	$x > 0$	$x > 0$ o $x < 0$
función < 0	$x < 0$	no
creciente	no	$(-\infty, 0)$
decreciente	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(0, \infty)$
máximos/mínimos	no	
continua	no en cero	
$x \to \infty$	$función \to 0^+$	
$x \to -\infty$	$función \to 0^-$	$función \to 0^+$
asíntota horizontal	$y = 0$	
$x \to 0^+$	$función \to \infty$	
$x \to 0^-$	$función \to -\infty$	$función \to \infty$
asíntota vertical	$x = 0$	
cóncava hacia arriba	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
cóncava hacia abajo	$(-\infty, 0)$	no
punto de inflexión	no	
razón de cambio	negativa	positiva en $(-\infty, 0)$ negativa en $(0, \infty)$
¿cómo cambia la razón?	negativa en $(-\infty, 0)$ positiva en $(0, \infty)$	siempre positiva

Hay palabras nuevas en la tabla:

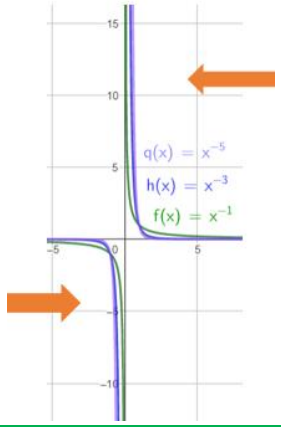
Asíntota Las gráficas parecen aplanarse a la derecha y a la izquierda, haciéndose cada vez más cercana a la recta horizontal $y = 0$. A esta recta le llamamos *asíntota horizontal*.

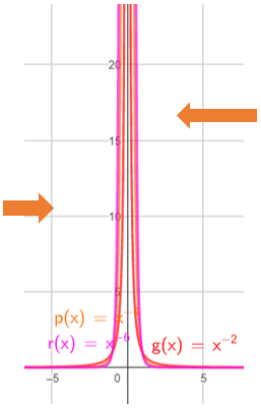




$función \to 0^+$	Se lee "f tiende a cero por arriba" es decir, por valores mayores que cero, *en este caso*.
$función \to 0^-$	Se lee "f tiende a cero por abajo" es decir, por valores menores que cero, *en este caso*.

De forma análoga, la gráfica parece aplanarse cuando va hacia arriba y hacia abajo de la pantalla, haciéndose cada vez más cercana a la recta vertical $x = 0$. A esta recta la llamamos *asíntota vertical*.





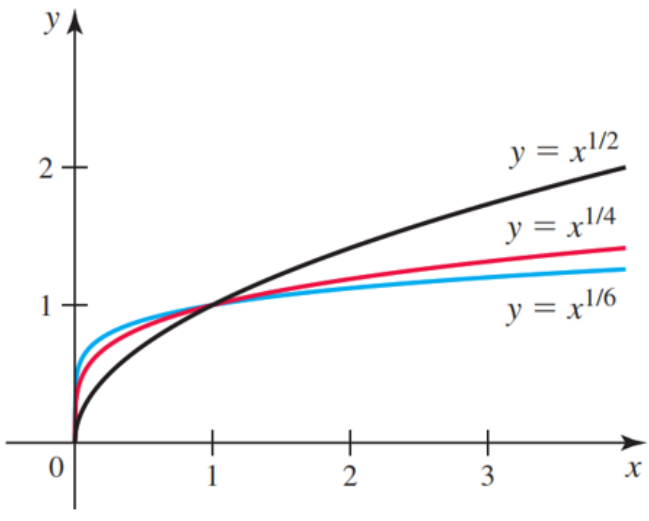
$x \to 0^+$	Se lee "x tiende a cero por derecha" es decir, por valores mayores que cero, *en este caso*.
$x \to 0^-$	Se lee "x tiende a cero por izquierda" es decir, por valores menores que cero, *en este caso*.

DEFINICIÓN Asíntotas horizontales y asíntotas verticales

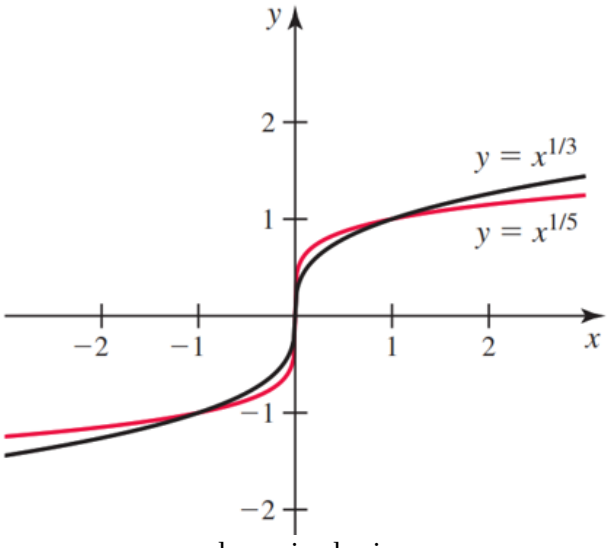
La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función $y = f(x)$, si $f(x)$ se aproxima a b, cuando x tiende a ∞ o $-\infty$.

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función $y = f(x)$, si $f\ (x)$ tiende a ∞ o $-\infty$ cuando x se aproxima a a por cualquier dirección.

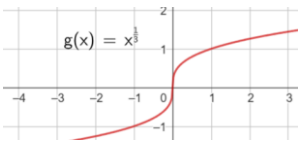
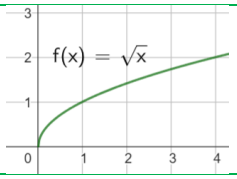
➥ Potencias fraccionarias menores que 1 (Raíces) (Surgen en aplicaciones biológicas.)



con denominador par

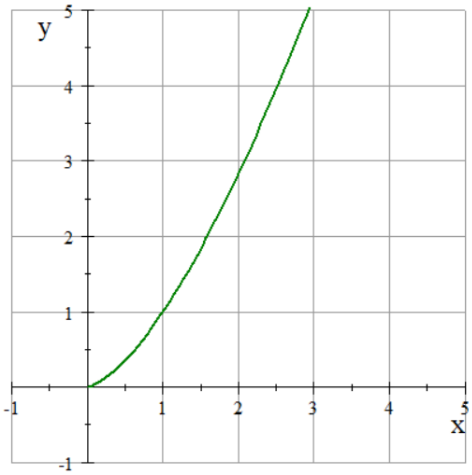


con denominador impar

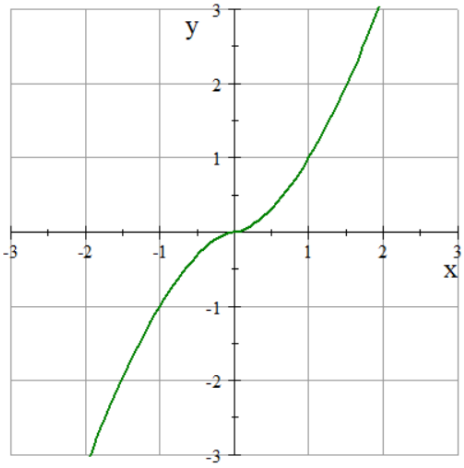
Fórmula	$y = x^{1/impar}$ $impar > 1$	$y = x^{1/par}$
ejemplos		
dominio	todos los reales	$[0, \infty)$
rango	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
función $= 0$	en $x = 0$	
pasa por	$(-1,-1), (0,0), (1,1)$	$(0,0), (1,1)$
función > 0	$x > 0$	$x > 0$
función < 0	$x < 0$	no
creciente	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(0, \infty)$
decreciente	no	
máximos/mínimos	no	mínimo absoluto en (0,0)
continua	si	
$x \to \infty$	$función \to \infty$	
$x \to -\infty$	$función \to -\infty$	no
Asíntota	no tiene	
cóncava hacia arriba	$(-\infty, 0)$	no
cóncava hacia abajo	$(0, \infty)$	
punto de inflexión	en $(0,0)$	no
razón de cambio	positiva en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	positiva en $(0, \infty)$
¿cómo cambia la razón?	positiva en $(-\infty, 0)$ negativa en $(0, \infty)$	negativa en $(0, \infty)$

Hecho interesante: Ponga cualquier número positivo en su calculadora. Saque la raíz cuadrada. Luego nuevamente saque raíz cuadrada, luego otra vez, y así sucesivamente. A la larga siempre obtendrá 1.

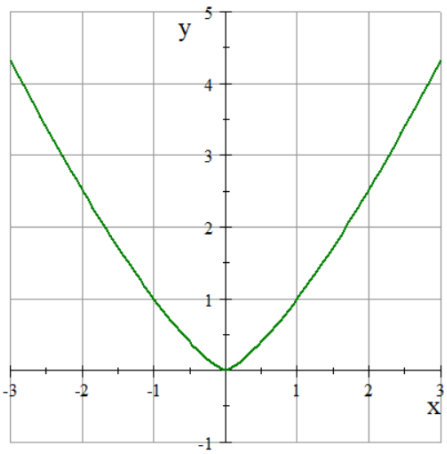
➥ Potencias fraccionarias mayores que 1



con denominador par $y = x^{3/2}$



con denominador impar $y = x^{5/3}$



con denominador impar $y = x^{4/3}$

EJEMPLOS APLICADOS

Ejemplo 4: El índice de masa corporal de una persona (IMC) se obtiene dividiendo el peso entre el cuadrado de la estatura; si el jugador de básquetbol, Michael Jordan, tiene un peso de 97,9 kg, plantea la fórmula para el IMC con respecto a la estatura.

Solución Si x representa la estatura del jugador, la fórmula para el índice de masa corporal de Michael Jordan está dada por

$$IMC = \frac{97{,}9}{x^2}$$

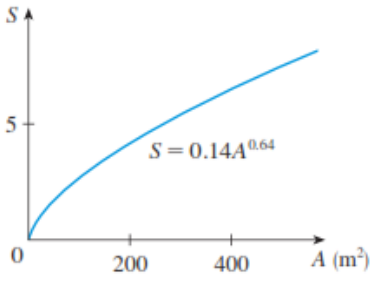
que podemos expresar como $IMC = 97{,}9x^{-2}$. Observa que el IMC es una función potencia en donde el exponente de la variable es -2 y la constante es $k = 97{,}9$ ■

Ejemplo 5: **Riqueza de especies en cuevas de murciélagos** Tiene sentido que cuanto mayor es el área de una región, mayor es el número de especies que habitan en la región. Muchos ecologistas han modelado la relación especie-área con una función potencia. En particular, el número de especies S de murciélagos que viven en cuevas en el centro de México se ha relacionado con el área de superficie A de las cuevas mediante la ecuación $S = 0{,}14\ A^{0{,}64}$. (Este modelo se derivará de datos recopilados, en Bioestadística).

(a) La cueva llamada Misión Imposible cerca de Puebla, México, tiene una superficie de $A = 60\ m^2$. ¿Cuántas especies de murciélagos esperaríamos encontrar en esa cueva?

(b) Si descubrimos que en una cueva viven cuatro especies de murciélagos, ¿Cuál es el área de la cueva?

Solución La gráfica de la función potencia que modela esta situación es la de la figura.



(a) De acuerdo al modelo $S = 0{,}14\ A^{0{,}64}$, el número esperado de especies en una cueva con un área de superficie $A = 60\ m^2$ es

$$S = 0{,}14\ (60)^{0{,}64} \approx 1{,}92$$

Entonces, en esta cueva, esperaríamos encontrar dos especies de murciélagos.

(b) Para una cueva con cuatro especies de murciélagos tenemos

$$S = 0{,}14\ A^{0{,}64} = 4 \quad \Longrightarrow \quad A^{0{,}64} = \frac{4}{0{,}14}$$

Luego

$$A = \left(\frac{4}{0{,}14}\right)^{1/0{,}64} \approx 188$$

Entonces, para que en una cueva vivan cuatro especies de murciélagos, ésta debería tener un área de superficie de aproximadamente $190\ m^2$. ■

Ejemplo 6: **Índice de diversidad** Una forma de medir la diversidad de una población de organismos es calcular su índice de diversidad de Gini-Simpson, H. Para una ejemplificación simple, consideremos una población de células de levadura; cada célula de levadura es uno de dos tipos (digamos "rojo" y "verde"). El índice de diversidad de la población es la probabilidad de que si dos células se seleccionan al azar, sean de diferentes colores (es decir, una es roja y la otra es verde).

Si p es la proporción de células de tipo rojo, el índice de diversidad H puede calcularse a partir de p utilizando la fórmula:

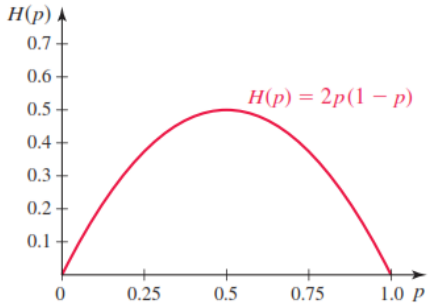
$$H(p) = 2p\,(1 - p).$$

$H(p)$ es un polinomio en p. ¿Cuál es su grado? ¿Cuál es el dominio y el rango de la función $H(p)$?

Solución: Multiplicando vemos que $H(p) = 2p - 2p^2$, entonces el grado de H es 2. Dado que p representa la proporción de células rojas, debe estar entre 0 y 1, por lo que el dominio de H es $[0, 1]$.

Para calcular el rango, podemos utilizar la aplicación geogebra para trazar $H(p)$ para $p \in [0, 1]$.

Vemos en el gráfico que $H(p)$ toma el valor más pequeño, 0, cuando $p = 0$ o 1. (Cuando $p = 0$, todas las células son de tipo verde, por lo que hay cero posibilidades de que dos células elegidas al azar sean de diferentes tipos.)



El valor máximo de H ocurre cuando $p = 1/2$ (es decir, $0 \le H(p) \le H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$). Entonces el rango de H es $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. En el tema de derivadas aprenderemos cómo encontrar los valores máximos de las funciones como $H(p)$ sin necesidad de trazarlos. ■

Ejemplo 7: **Escala y alometría**: Las funciones de potencia se encuentran con frecuencia en las relaciones de escala entre variables biológicas (por ejemplo, tamaños de órganos). Estas relaciones las podemos escribir como una ecuación

$$y = kx^p$$

Por ejemplo, ***Savage et al. (2004)*** mostraron que las frecuencias cardíacas en reposo, R (en latidos / min), de los mamíferos en reposo, disminuían con la masa del mamífero, M (en gramos), según la siguiente relación:

$$R(M) = 1180M^{-1/4}$$

Esta relación, junto con los datos de animales reales, se muestra en la figura.

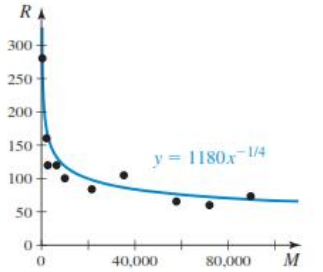
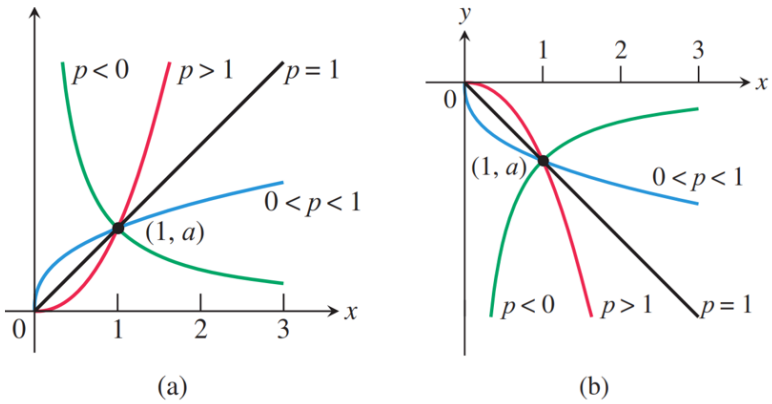


Figure 1.33 Resting heart rate, R, as a function of body mass, M, for mammals. Data adapted from ***Savage et al. 2004.***

Esta relación debe interpretarse en un sentido estadístico; se obtiene ajustando una curva a los puntos de datos. Las frecuencias cardíacas en realidad varían entre animales de la misma especie, dependiendo de la condición del animal, y los puntos de datos para diferentes especies generalmente se encuentran dispersos alrededor de la curva ajustada. ■

RESUMIENDO

$f(x) = a \cdot x^p$ $\quad x \ge 0$. (a) $a > 0$, (b) $a < 0$.



Funciones Racionales

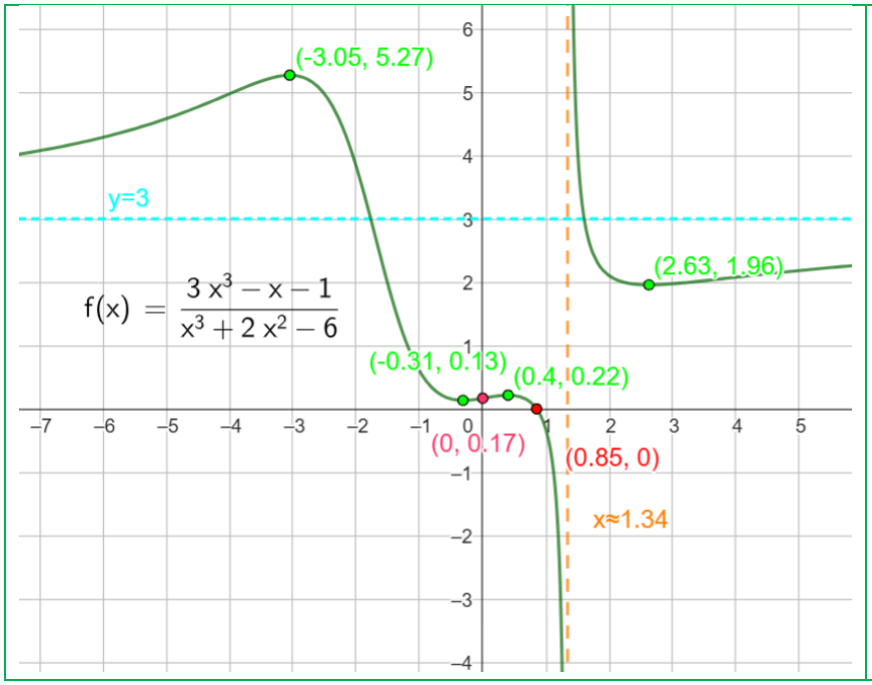
Las funciones racionales son razones (cocientes) de dos funciones polinomiales. El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los ceros (o raíces) del denominador. Sus gráficas no son fáciles de realizar a mano, pero la tecnología nos ayuda a verlas rápidamente.

Ejemplo 8: Consideremos la función racional

$$f(x) = \frac{3x^3 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - 6}$$

y respondamos las siguientes preguntas: ¿Cuál es su dominio? ¿Cuáles son sus raíces? ¿Dónde tiene máximos y mínimos? ¿Hacia cuales valores se aproxima f cuando x crece?

Lo que podemos hacer por ahora es recurrir a la gráfica, vamos a geogebra:



Dominio $(-\infty; 1{,}34) \cup (1{,}34; \infty)$

A = Raíces(f, −9.34, 11.66) = (0.85, 0)

B = Extremo(f, −9.34, 11.66) = (-3.05, 5.27)

C = Extremo(f, −9.34, 11.66) = (-0.31, 0.13)

D = Extremo(f, −9.34, 11.66) = (0.4, 0.22)

E = Extremo(f, −9.34, 11.66) = (2.63, 1.96)

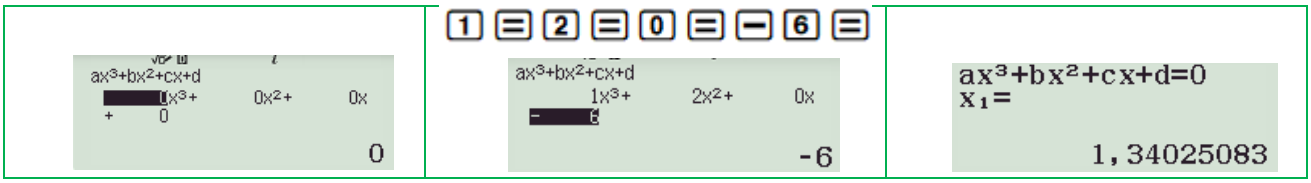
F = Interseca(f, EjeY, (0, 0.17)) = (0, 0.17)

Asíntota Vertical $y = 3$

Asíntota Horizontal $x \approx 1{,}34$

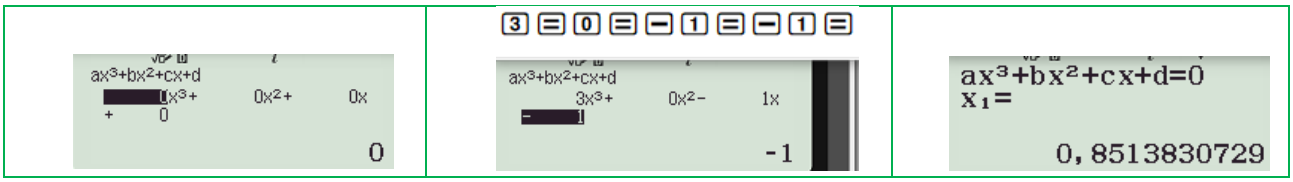
El dominio consiste de todos los números reales excepto los que hacen cero el denominador, vamos a la calculadora:

Buscamos menú → ecuación → polinomio → grado 3



Esto nos lleva a la asíntota vertical $x = 1{,}34$.

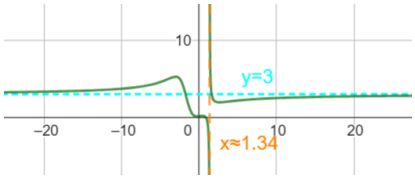
Las raíces o ceros de las funciones racionales son las raíces o cero de la función del numerador, vamos a la calculadora:



Esto nos lleva al corte con el eje x en el punto $(0{,}85; 0)$.

La función tiene dos máximos, uno cerca de $x = -3$ y otro cerca de $x = 0{,}4$, y tiene dós mínimos, uno cerca de $x = -0{,}3$ y otro cerca de $x = 2{,}6$.

Si nos alejamos podemos observar como la gráfica se aproxima a sus asíntotas.



Podríamos seguir observando la gráfica y contesta preguntas como, ¿Dónde es positiva/negativa? ¿Dónde es creciente/decreciente? ¿Concavidades?... ■

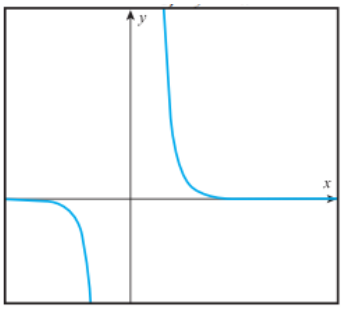
A TRABAJAR

1. Relacionar las gráficas con las siguientes funciones.

$y = 5x^3$ $\quad$ $y = 2\sqrt[3]{x}$ $\quad$ $y = 2x^{-5}$ $\quad$ $y = 7x^4$

$y = \dfrac{1{,}5}{x^2}$ $\quad$ $y = 4x^{3/2}$ $\quad$ $y = 0{,}75\sqrt{x}$ $\quad$ $y = x^7$

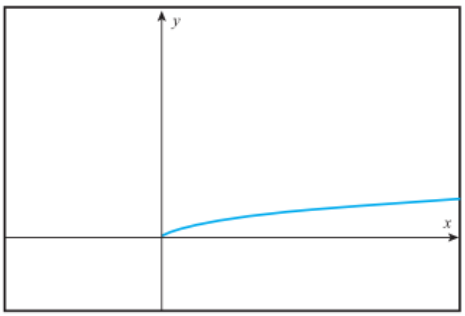
i.



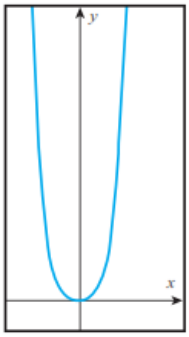
ii.



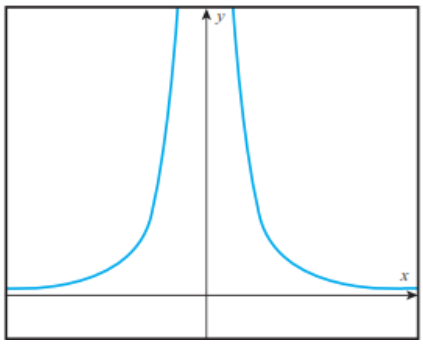
iii.



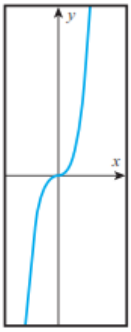
iv.



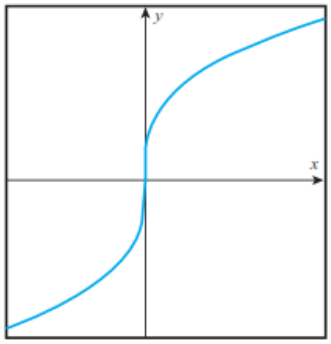
v.



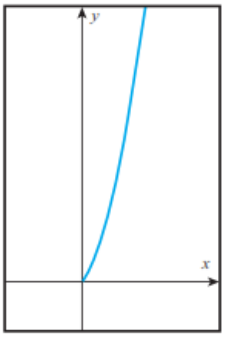
vi.



vii.



viii.



2. Utilizar la aplicación geogebra para dibujar simultáneamente $f(x) = x^2,\ x \geq 0$ y $g(x) = x^4,\ x \geq 0$. ¿Para qué valores de x se cumple que $f(x) > g(x)$, y para qué valores de x es $f(x) < g(x)$?

3. Utilizar la aplicación geogebra para dibujar simultáneamente $f(x) = x^3,\ x \geq 0$ y $g(x) = x^5,\ x \geq 0$. ¿Para qué valores de x se cumple que $f(x) > g(x)$, y para qué valores de x es $f(x) < g(x)$?

4. Dibujar $y = x^n,\ \ x \geq 0,$ para $n = 1, 2, 3$ y 4 en un solo sistema de coordenadas. ¿Dónde se cortan las curvas?

5. Utilizar la aplicación geogebra para dibujar simultáneamente $f(x) = x^2,\ \ x \geq 0$ y $g(x) = x^{1/2},\ \ x \geq 0$. ¿Para qué valores de x se cumple que $f(x) > g(x)$, y para qué valores de x es $f(x) < g(x)$? ¿Dónde se cortan las curvas?

6. Comparar $f(x) = \frac{1}{x},\ \ x > 0$ y $g(x) = \frac{1}{x^2},\ \ x > 0$ graficando las dos funciones. ¿Dónde se intersecan las curvas? ¿Qué función es mayor para valores pequeños de x? ¿Y para valores grandes de x?

7. La distancia de frenado, en metros, de un Alfa Romeo en carretera seca es proporcional al cuadrado de su velocidad, $v\ km/h$, en el momento en que se aplican los frenos, y está dada por la función potencia $f(v) = 4{,}25 \times 10^{-3}v^2$.

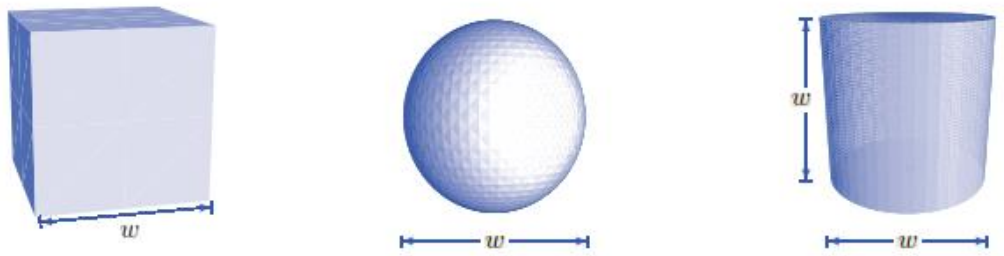
a) Identifique las constantes k y p.
b) Encuentre las distancias de frenado de un Alfa Romeo que va a 60 km/h y a 225 km/h (su velocidad máxima). ¿Qué distancia de frenado es mayor? Explica tu respuesta en términos algebraicos y prácticos.
c) En el lugar de un accidente con un Alfa Romeo, las marcas de derrape muestran que la distancia de frenado es de 85 $metros$. ¿A qué velocidad iba el auto cuando se aplicaron los frenos?
d) ¿Qué pasa con la distancia de frenado del Alfa Romeo? (i) ¿Si su velocidad se duplica de $v = 30\ km/h$ a 60 km/h? ¿De 50 km/h a 100 km/h? (ii) ¿Si la velocidad se triplica de 40 km/h a 120 km/h? ¿De 60 km/h a 180 km/h?

8. a) La distancia de frenado de un Alfa Romeo en carretera mojada a $v\ km/h$ está dada por $g(v) = 5{,}3 \times 10^{-3}v^2$. Encuentre la distancia de frenado a 60 km/h. ¿Es mayor o menor que la distancia de frenado en carretera seca del ejercicio anterior? Explica tu respuesta en términos algebraicos y prácticos.
b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción para una carretera con hielo, si el auto viajando a 60 km/h utiliza 50 metros para frenar?

9. Los objetos sólidos de la siguiente figura, tienen volumen V, en cm^3, dadas por

Cubo	$V = w^3$
Esfera	$V = \frac{\pi}{6}w^3$
Cilindro	$V = \frac{\pi}{4}w^3$

a) ¿Cuál es el exponente?
b) ¿Cuál tiene el coeficiente mayor? ¿Cuál el menor? Interprete su respuesta en términos prácticos.
c) Para cada objeto, encontrar la medida w si el volumen es 10 cm^3.



10. El peso, w, en *libras*, de un astronauta a r *mil millas* del centro de la Tierra está dado por

$$w = 2880\ r^{-2}$$

a) ¿Es ésta una función de potencia? Identificar las constantes k y p.

b) ¿Cuánto pesa el astronauta en la superficie de la Tierra, a 4000 millas del centro? ¿Cuánto pesa el astronauta a 1000 millas sobre la superficie terrestre? ¿Qué peso es menor?
c) Graficar la función, y marcar los puntos obtenidos en b) sobre la gráfica.
d) Encontrar la distancia desde el centro de la tierra al punto en que el peso del astronauta es de 100 libras.

11. Para una determinada especie de animal, la longitud del hueso, L, en cm, viene dada por

$$L = 7\sqrt{A}$$

donde A es el área de la sección transversal del hueso en cm^2.
a) ¿Es L una función potencia de A? Si es así, identifique los valores de k y p.
b) Encuentre las longitudes de los huesos para $A = 36\ cm^2$ y $A = 100cm^2$. ¿Qué longitud de hueso es mayor? Explicar tu respuesta en términos algebraicos.
c) Graficar la función, y marcar los puntos obtenidos en b) sobre la gráfica.

12. Para cada función potencia, identifique el coeficiente k y el exponente, p. (Supongamos que todas las constantes son positivos.) ¿Qué gráfico (I) – (IV) da el mejor ajuste?
a) El volumen de una esfera en función de su radio r:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

b) La fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre un objeto en función de la distancia r del objeto desde el centro de la tierra:

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

G, m, M constantes.
c) El período de un péndulo en función de su longitud l:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

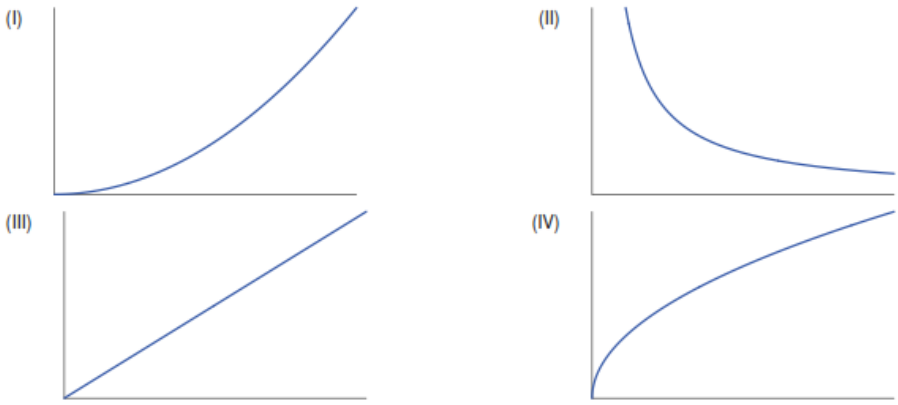
g constante
d) La presión de una cantidad de gas en función de su volumen V (a una temperatura fija T):

$$P = \frac{nRT}{V}$$

n, R, T constantes.
e) Energía en función de la masa m:

$$E = mc^2$$

c una constante (la velocidad de la luz).



13. El área de superficie de un cilindro cerrado de radio r y altura h es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

a) Escribir la expresión como una función de potencia de r o h, si es posible.
b) Si la altura es el doble del radio, escribir S como una función potencia de r.