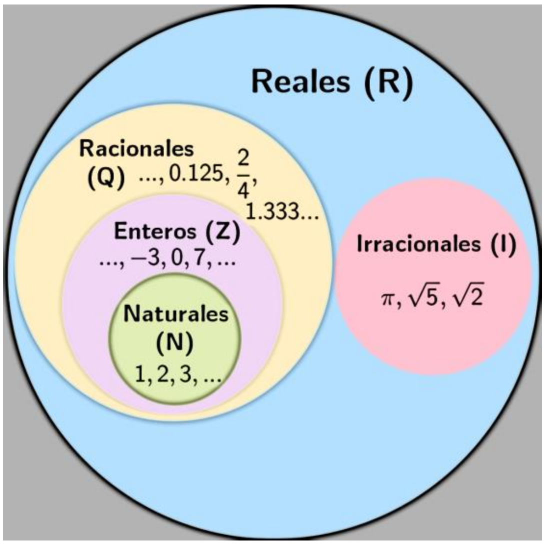
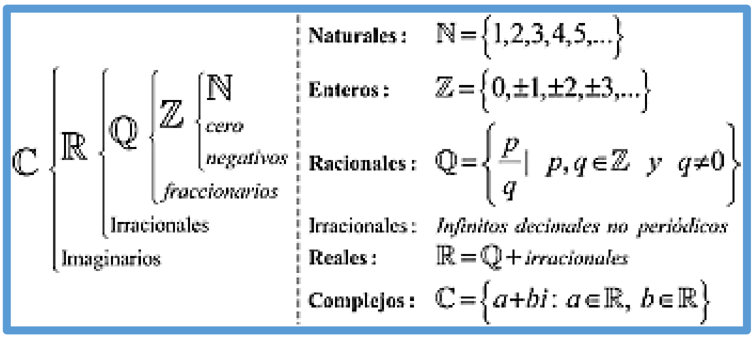
Conjuntos Numéricos

Los conjuntos numéricos permiten representar diversas situaciones del entorno; son, en otras palabras, los tipos de números que las personas tenemos a nuestra disposición para realizar operaciones, tanto cotidianas como a un nivel más sofisticado.

Los conjuntos numéricos son las categorías en las que se clasifican los números, en función de sus diferentes características. Los conjuntos numéricos utilizados en las matemáticas básicas son: Naturales (N), enteros (Z), racionales (Q), irracionales (Q*), reales (R) y complejos (C). Son utilizados en diversas situaciones, por todas las ramas del conocimiento.



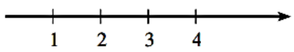


Los números naturales:

Los números naturales N comienzan con el número 1 (uno). Como conjunto se representa de la siguiente manera:

N = {1,2,3,...}

Para representar a los naturales en una recta, se ubica hacia la derecha la secuencia 1, 2, 3, ... a una distancia fija, denominada unidad, como se ilustra en la siguiente figura:



Algunas propiedades básicas de los números naturales (N) son las siguientes:

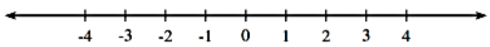
- Todo número natural n tiene un sucesor, es decir, para n ∈ N, entonces (n+1) ∈ N es el consecutivo de n. Por ejemplo: 5 ∈ N, entonces 5+1 = 6 ∈ N.
- Entre dos números naturales consecutivos, no existe otro número natural.

Los números enteros:

El conjunto de los números enteros Z, se forma al incluir el 0 (cero) y los negativos de los números naturales. Este conjunto, amplía las posibilidades de representar diversas situaciones. Se representa de la siguiente forma:

Z = {...,−3,−2,−1,0,1,2,3,...}

Para representar los Z en una recta, se toma una longitud fija como unidad, se ubica el 0 (cero) y los valores a la derecha de cero son positivos y a la izquierda se marcan con el signo negativo. Esta situación se ilustra en la siguiente gráfica:



Algunas de las propiedades de los números enteros (Z), son las siguientes:

- No tiene primero ni último elemento. Entre dos enteros consecutivos, no existe ningún otro entero.
- Si n es un número entero, existe −n ∈ Z, tal que n+ (−n) = 0. Es decir, todo número entero, tiene un inverso aditivo.
- Al sumar, restar o multiplicar dos números enteros, el resultado es otro número entero.

Los números racionales

Los números racionales Q permiten representar partes de una unidad.

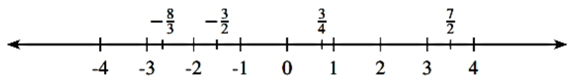
Tienen la propiedad de que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$, en el que m es el numerador y n el denominador, que no puede ser 0 (cero).

Se definen de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m,n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \right\}$$

Todos los números enteros son números racionales, ya que cualquier entero se puede expresar como la división entre él mismo y el 1, es decir si n ∈ Z, n = $\frac{\mathrm{n}}{1}$ ∈ Q.

En una recta, los racionales se representan de la siguiente forma:



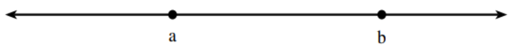
Los números reales

Los números reales R es un conjunto más amplio que incluye a los números racionales.

Este conjunto es el de los números decimales. Ejemplos: 4.3216, 3.252525...., 6.8752.

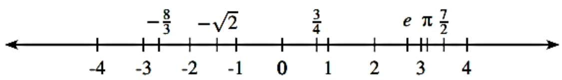
El conjunto de los números reales está conformado por todos los números decimales y se denota por R.

De acuerdo con la siguiente gráfica:



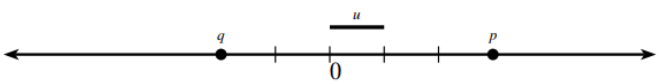
se puede afirmar que a es menor que b, puesto que a está a la izquierda de b en la recta real, simbólicamente se representa como $a < b$. También, si $a < b$ entonces $b-a > 0$.

La recta real se dibuja en una recta orientada a la que se le marca un punto de referencia, que se denota como cero (0). A la derecha de cero (0), los números reales son positivos y a la izquierda son negativos. La representación gráfica más usual es la siguiente:



Otra forma de representar la recta real es escribiendo un intervalo abierto en el que sus extremos son $-\infty$ y $+\infty$, es decir $(-\infty,\infty)$. Note que cuando se escribe ∞ no se le antecede el signo +, se entiende que es positivo.

Para marcar puntos sobre la recta real se toma una longitud arbitraria como unidad. De esta forma, el valor que acompaña al punto, indica el número de unidades a las que se encuentra dicho punto del origen (cero). Si es positivo, las unidades se cuentan a la derecha de 0 (cero) y si es negativo se cuentan a la izquierda de cero. Si tomamos a la longitud del segmento como unidad (u), el punto p marcado con el número 3, indica que p está a 3 unidades a la derecha del origen (0). El punto q, marcado con el número −2, indica que q está a dos unidades a la izquierda del origen (0). Estas situaciones se ilustran en el siguiente gráfico.



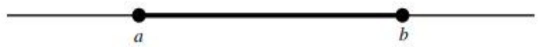
Intervalos

En la recta real se definen subconjuntos que se llaman intervalos. Estos pueden ser cerrados, abiertos, abiertos a la izquierda y cerrados a la derecha, cerrados a la izquierda y abiertos a la derecha o tiene el infinito en uno o en ambos extremos.

A continuación se presentan las definiciones y ejemplos de diferentes intervalos. Los intervalos en la recta real se leen de izquierda a derecha. Por lo tanto el número menor está a la izquierda y el mayor a la derecha.

Intervalo cerrado

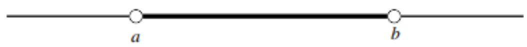
El intervalo cerrado $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}/a\leq x\leq b\}$, se representa gráficamente de la siguiente manera.



Los puntos rellenos significan que tanto a como b y todos los números al interior del intervalo, resaltados con un segmento del línea más gruesa, son elementos del intervalo.

Intervalo abierto

El intervalo abierto $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\}$, se representa como:



Los puntos sin llenar significan que tanto a como b no pertenecen al intervalo. Por lo tanto, el intervalo está conformado por todos los números reales al interior del intervalo, resaltados con un segmento de línea más gruesa.

Intervalo abierto a la izquierda, cerrado a la derecha

El intervalo abierto a la izquierda, cerrado a la derecha $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}/a<x\leq b\}$, se representa como

El punto sin rellenar a, significa que no pertenece al intervalo, pero b, que está relleno, pertenece al intervalo. Por lo tanto, está conformado por todos los números al interior del intervalo, resaltados con un segmento de línea más gruesa y por b que está relleno.

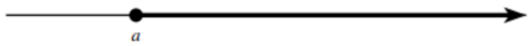
Intervalo cerrado a la izquierda, abierto a la derecha

El intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha $[a,b) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$, se representa como

El punto a está relleno, significa que pertenece al intervalo, pero b, que no está relleno, no pertenecen al intervalo. Por lo tanto, está conformado por todos los números al interior del intervalo, resaltados con un segmento de línea más gruesa y por a que está en el extremo izquierdo.

Intervalo cerrado a la izquierda, infinito a la derecha

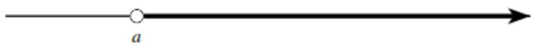
El intervalo cerrado a la izquierda e infinito a la derecha se define como $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x\}$, se representa gráficamente como:



El punto a está relleno, significa que pertenece al intervalo. Todos los números que están a la derecha de a forman parte del intervalo. Cuando un extremo es el ∞ se deja abierto, es decir, se escribe un paréntesis.

Intervalo abierto a la izquierda, infinito a la derecha

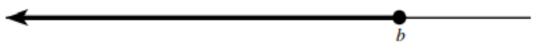
El intervalo abierto $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}/a < x\}$, se representa como



El punto a no está relleno, significa que no pertenece al intervalo. Todos los números que están a la derecha de a forman parte del intervalo. Cuando un extremo es el ∞, se deja abierto, es decir, se escribe un paréntesis.

Intervalo infinito a la izquierda, cerrado a la derecha

El intervalo infinito a la izquierda y cerrado a la derecha $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq b\}$, se representa gráficamente como



El punto relleno b, significa que pertenece al intervalo. Todos los números que están a la izquierda de b forman parte del intervalo. Cuando un extremo es el $-\infty$, se deja abierto, es decir se escribe un paréntesis.

Intervalo infinito a la izquierda, abierto a la derecha

El intervalo infinito a la izquierda y abierto a la derecha $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}/x < b\}$, se representa como

El punto sin rellenar b, significa que no pertenece al intervalo. Todos los números que están a la izquierda de b forman parte del intervalo. Cuando un extremo es el $-\infty$, se deja abierto, es decir se escribe un paréntesis.

Operaciones en R

Propiedades

Habitualmente operamos con números reales (sumamos, restamos, etc.), pero existen ciertas reglas que debemos respetar, este conjunto de reglas reciben el nombre de propiedades.

Propiedades de la adición (Suma): Sean a y $b \in \mathbb{R}$

1. *Ley de cierre:* Para todo par de números a y b que pertenecen a los reales se cumple que la suma $a + b$ pertenece a los reales. En símbolos: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}:\ a + b \in \mathbb{R}$
2. *Propiedad Conmutativa:* $\forall\, a, b \in \mathbb{R}:\ a + b = b + a$
3. *Propiedad Asociativa:* $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}:\ (a + b) + c = a + (b + c)$
4. *Existencia del elemento neutro para la suma:* Para todo número a que pertenece a los reales, existe el número 0 que pertenece a los reales tal que se cumple que el número a más 0 es igual al mismo número a.
$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists\, 0 \in \mathbb{R}:\ a + 0 = 0 + a = a$$
5. *Existencia del elemento opuesto:*
$$\forall\, a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0, \exists (-a) \in \mathbb{R}:\ a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Propiedades del producto (Multiplicación):

1. *Ley de cierre:* $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : a.b \in \mathbb{R}$
2. *Propiedad Conmutativa*: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}:\ a.b = b.a$
3. *Propiedad Asociativa:* $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}: (a.b).c = a.(b.c)$
4. *Existencia del elemento neutro para el producto:* $\forall a \in \mathbb{R}, \exists\, 1 \in \mathbb{R}:\ a.1 = 1.a = a$
5. *Existencia del elemento inverso:* $\forall\, a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}:\ a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$
6. *Distributiva del Producto respecto de la suma:* $c.(a + b) = c.a + c.b$

A continuación se enunciará algunas reglas que te permitirán resolver ejercicios combinados.

- Reglas de la supresión de paréntesis:

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c$$

Si tenemos un signo menos delante del paréntesis, cambian de signo los términos que se encuentran dentro del mismo.

- Regla de los signos para el producto y la división:

$$+.+= + \qquad -.-= + \qquad -:+= -$$
$$+.-= - \qquad +:+= + \qquad -:-= +$$
$$-.+= - \qquad +:-= -$$

Si multiplicamos o dividimos dos números con signos iguales el resultado es positivo, mientras que, si multiplicamos o dividimos dos números de distintos signos el resultado en negativo.

- Las operaciones combinadas se realizan teniendo en cuenta las siguientes prioridades:
  a) Efectuar las operaciones entre paréntesis, corchetes y llaves
  b) Calcular las potencias y raíces.
  c) Efectuar los productos y cocientes.
  d) Y por último realizar las sumas y restas.

Potencia y Radicación de Números Reales

Definición de Potencia

Si a es un número real, distinto de 0, y n es un número natural, se define potencia n-ésima de a:

$$a^n = \underbrace{a.a.a\ldots a}_{n\ veces}$$

a^n se lee: "a elevado a la n"; a se denomina base y n el exponente. Además se establece, por convención:

$$1)\ \ a^0 = 1 \qquad 2)\ \ a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Por lo tanto se cumple también que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propiedades de la potencia:

1. *Producto de potencias de igual base:* $a^n . a^m = a^{n+m}$
2. *Cociente de potencias de igual base:* $a^n : a^m = a^{n-m}$.
3. *Potencia de potencia:* $(a^n)^m = a^{n.m}$
4. *Distributiva de la potencia respecto del producto y del cociente:*

$$(a.b)^n = a^n.b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad si \quad b \neq 0$$

Observación

La potenciación **no es distributiva** respecto a la **suma o la diferencia**. Es decir

$$\boxed{(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n}$$

Radicación

La expresión $\sqrt[n]{a}$ se lee "**la raíz enésima de un número *a***", con $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, n se denomina índice y a radicando.

Propiedades de la Radicación

1. Distributiva respecto del producto y del cociente:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

2. Raíz de raíz:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

3. Amplificación y simplificación de índices ($r \neq 0$):

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.r]{a^{m.r}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}$$

La radicación **no es distributiva** respecto a la **suma o la diferencia**. Es decir:

$$\boxed{\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}}$$

Fuente:

Duarte, P. Conjuntos Numéricos. DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS. Universidad EAFIT. Colombia.