UNIDAD 1: GUÍA TEÓRICA-PRÁCTICA

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS

Expresiones Algebraicas

Se denomina **expresión algebraica** a la combinación de números y letras vinculadas por una operación.

Por ejemplo: $-6.w^2$

En dicha expresión algebraica, cada componente recibe un nombre particular:

- ✓ El valor **-6** recibe el nombre de coeficiente.
- ✓ La expresión $\mathbf{w^2}$ recibe el nombre de parte literal, en donde w es la variable.
- ✓ El punto que indica la multiplicación suele no escribirse, por lo tanto:

$-6.w^2 = -6w^2$

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

Suma y resta

Para sumar o restar expresiones algebraicas solo podremos hacerlo si estamos en presencia de expresiones semejantes. Dos o más expresiones son semejantes cuando tienen la misma parte literal o el mismo exponente de la variable.

Por ejemplo:

$$2h^6 \; y \; -5h^6 \; son \; semejantes$$
$$2h^6 \; y \; 6h \; no \; son \; semejantes \; (deben \; tener \; misma \; potencia)$$
$$2h^6 \; y \; 2k^6 \; no \; son \; semejantes \; (deben \; tener \; misma \; variable \; y \; potencia)$$

Para sumar dos o más expresiones algebraicas que verifiquen ser semejantes, se procede sólo operando los coeficientes, es decir, las partes literales no se operan. Por ejemplo:

$$-2d^2 + 7d^2 = 5d^2$$

En caso de tener alguna expresión que no sea semejante, se deja indicada la suma:

$$3w^3 + 5h^2 - 7w^3 = 5h^2 - 4w^3$$

Ejercicio 1: Resolver las siguientes operaciones

a) $-3t^2 - 5t^2 + 18t^2 =$
b) $w^5 - 9w^5 =$
c) $-y^4 - 5y^5 + 16y^4 =$
d) $-3h^2 + 3h^2 =$
e) $z^2 - 20z^2 + 18z^2 =$
f) $-13p^2 - 15p^3 + 8p^4 =$
g) $-5o^2 - 14o^2 =$
h) $m - 5m^2 + 12m^2 =$

Producto y Cociente.

Cuando multiplicamos expresiones algebraicas, se multiplican entre sí los coeficientes con su signo y las partes literales. En ciertos casos se debe aplicar la ley distributiva.

Por ejemplo: $4t^2.(-2t^3) = -8t^5$

- ✓ Los coeficientes se multiplicaron entre sí
- ✓ Las partes literales se multiplicaron entre sí: (en este caso, al tener la misma variable, se aplica propiedad de potencias de igual base y se suman los exponentes)

Veamos otro ejemplo:

$-2w^3.3t^2 = -6w^3t^2$

En este caso, solo se pudo operar entre los coeficientes pero en las partes literales queda indicado el producto.

Con el cociente sucede algo similar, por ejemplo:

$-10f^6:(-2f^2) = 5f^4$

- ✓ Los coeficientes se dividieron entre sí
- ✓ Las partes literales se dividieron entre sí: (en este caso, al tener la misma variable, se aplica propiedad de potencias de igual base y se restan los exponentes)

FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si A y B son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$	Suma y producto de términos iguales
2. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	Cuadrado de una suma
3. $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$	Cuadrado de una diferencia
4. $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	Cubo de una suma
5. $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	Cubo de una diferencia

Ejercicio 2: Reducir a la mínima expresión

a) a . a =
b) m + m =
c) r – r =
d) t : t =
e) 5e – 3e =
f) $6b \cdot 2b^2 =$
g) $n.n^3 =$
h) $20h^6 : 5h =$
i) $2w^4 + 6w^4 =$

Ejercicio 3: Colocar V o F según corresponda

a) $2x + 3x + x = 5x$
b) $x - x = 1$
c) $0.x = 0$
d) $2x^2 + 3x^2 = 5x^4$
e) $x + x = x^2$
f) $x.x^3 = x^4$
g) $2x^3 - 3x^2 = -1x$
h) $x.x.x = 3x$

Ejercicio 4: Operar y reducir a la mínima expresión

a) $3x^2 - 2(x^2 - 5) =$
b) $(3x^2 - 3).(2x - 4) =$
c) $-2(x^5 - 2) =$
d) $(-2x^3 - 8).(2x^4 - 6) =$
e) $(-x^3 - 7).(x^4 - 3) =$
f) $5.(x^2 - 3).(x^3 - 2)$

Potenciación

Al potenciar una expresión algebraica, se debe recurrir a las propiedades de dicha operación. Por ejemplo:

$(-2x^2)^3 = -8x^6$

Ejercicio 5: Resolver las siguientes potencias

a) $(-2w^3)^2 =$
b) $(-3t^3)^3 =$
c) $(-s^4)^4 =$
d) $(2k^4)^5 =$

En resumen:

Cuando sumo o resto	Cuando multiplico o divido	Cuando potencio o radico
Solamente se operan entre sí las expresiones semejantes, es decir la que poseen la misma parte literal (variable y exponente) Ejemplo: $\mathbf{2w^4 - 5w^2 - 7w^4 = -5w^4 - 5w^2}$ En caso que no se pueda realizar la operación, se deja expresado de la misma manera: $\mathbf{5p^7 + 4p^2 = 5p^7 + 4p^2}$	Los coeficientes se multiplican o dividen entre sí, y si las partes literales tiene la misma variable, se aplica propiedades de potenciación, si no la tienen se deja expresado el producto o cociente: Ejemplos: $\mathbf{-2t^4.(-5t^2) = 10t^6}$ Los exponentes se suman porque hay multiplicación y tienen la misma base (t) $\mathbf{8t^7:(-4t^2) = -2t^5}$ Los exponentes se restan porque hay división y tienen la misma base (t) $\mathbf{8t^7:(-3t^2) = -\frac{8}{3}t^5}$ Cuando la división no da resultado entero lo dejo expresado como fracción. $\mathbf{2t^7.(-4w^2) = -8t^7.w^2}$ Se multiplican los números entre sí y las partes literales quedan expresadas como producto. $\mathbf{2t^7:(-2w^2) = -\frac{1t^7}{w^2}}$ Se hace el cociente entre los coeficientes y se deja expresado el cociente entre las partes literales.	Se aplica la propiedad distributiva de la potencia o la raíz respecto del producto y cociente. En el caso de la potenciación se elevan coeficiente y parte literal a la potencia indicada. Ejemplo: $\mathbf{(5.q^3)^2 = (5)^2.(q^3)^2 = 25q^6}$ En la parte literal se aplica la propiedad de "potencia de potencia" en donde se multiplican los exponentes. En el caso de la radicación, se aplica un procedimiento similar: $\mathbf{\sqrt[3]{8.r^6} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{r^6} = 2.r^2}$ En el caso de la parte literal se aplica la propiedad $\sqrt[n]{a^m} =$ se simplifican el índice y el exponente.

Polinomios

Un **monomio** es una expresión algebraica de la forma ax^k, donde:

- ✓ a es un número real
- ✓ k es un entero no negativo.

Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama **polinomio**.

- Un **polinomio** en una variable con coeficientes reales es una expresión de la forma:

$$p(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_2.x^2 + a_1.x + a_0,$$

donde:

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ son números reales llamados **coeficientes** del polinomio.
- n es un número entero no negativo (puede ser cero) llamado **grado** del polinomio (si $a_n \neq 0$), y se nota $gr(p(x)) = n$.
- x es la **variable** del polinomio.

El ***grado*** de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

El coeficiente $\mathbf{a_n}$ debe ser distinto de cero y se llama ***coeficiente principal***. Si el coeficiente principal es 1 se dice que el polinomio es *Mónico*.

El coeficiente $\mathbf{a_0}$ se llama *término independiente*.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomial	$9x^5$	5
6	monomial	6	0

Operaciones con polinomios:

Suma y resta

La adición de dos polinomios se realiza sumando los coeficientes que corresponden a la misma potencia de la variable. En la resta se debe considerar la regla de los signos.

Por ejemplo:

Hallar:

- p(x) + q(x)=
- p(x) - q(x)= siendo $p(x) = 2x^2 + 3$ y $q(x) = x + 3x^2 + 5$

Calculamos la suma:

$$\begin{array}{rcccccc} p(x) = & 2x^2 & + & 0x & + & 3 \\ +q(x) = & 3x^2 & + & x & + & 5 \\ \hline p(x)+q(x) = & 5x^2 & + & x & + & 8 \end{array}$$

Calculamos la diferencia:

$$\begin{array}{rcccccc} p(x) = & 2x^2 & + & 0x & + & 3 \\ -q(x) = & -3x^2 & - & x & - & 5 \\ \hline p(x)-q(x) = & -x^2 & - & x & - & 2 \end{array}$$

Multiplicación

La multiplicación de dos polinomios se realiza aplicando propiedad distributiva. Por ejemplo:

Hallar: p(x).q(x), siendo $p(x) = 3x^3 + x + 5$ y $q(x) = 2x^2 + 3$

$$p(x)\cdot q(x) = (3x^3 + x + 5)\cdot(2x^2+3) =$$

$$= 3x^3\cdot 2x^2 + 3x^3\cdot 3 + x\cdot 2x^2 + x\cdot 3 + 5\cdot 2x^2 + 5\cdot 3 =$$

$$= 6x^5 + 9x^3 + 2x^3 + 3x + 10x^2 + 15 =$$

$$= 6x^5 + 11x^3 + 10x^2 + 3x + 15$$

Ejercicio 6: para cada uno de los polinomios indica grado, coeficiente principal, término independiente

$a)$ $p(x) = 3 + 5x^5 + 6x^3$ $\quad d)$ $p(x) = x^4 + 9$

$b)$ $p(x) = 2 - x$ $\quad e)$ $p(x) = x^2 + 1 + 4x^2$

$c)$ $p(x) = 0$ $\quad f)$ $p(x) = 3x^4$

Ejercicio 7: resolver

Considerando los polinomios $p(x) = x^5 - 3x^2 + 2x$ y $q(x) = -2x^4 + 5x^2$, efectúe las siguientes operaciones indicando el grado del polinomio resultante:

$a)$ $p(x) - q(x)$. $\quad c)$ $p(x)\cdot q(x)$.

$b)$ $p(x) + 3q(x) + 5x^2$. $\quad d)$ $q(x)^2$.

División

El cociente c(x) de dividir p(x) por el polinomio q(x) = (x-a) se puede calcular por la Regla de Ruffini.

Veamos el siguiente ejemplo:

Halla el cociente de dividir

$p(x) = -x^4 + 7x^3 - 4x^2$
$q(x) = x - 3$

Termino independiente de Q(x) **cambiado de signo**

$$\begin{array}{c|ccccc} & -1 & 7 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & & -3 & 12 & 24 & 72 \\ \hline & -1 & 4 & 8 & 24 & \boxed{72} \end{array}$$

Coeficientes de P(x) **completando todos los términos**

Resto

Se baja el primer término con su signo y se continúa con la multiplicación y suma

El cociente es $c(x) = -x^3 + 4x^2 + 8x + 24$ y el resto es $r(x) = 72$

Raíces.

Un número r es una raíz del polinomio p(x) si verifica que p(r) = 0.

Por ejemplo: Verificar si el número a = 2 es raiz de $p(x) = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32$. Probamos si a = 2 es raíz calculando p(a):

$p(a) = p(2) = 2^5-4 \cdot 2^3-8 \cdot 2^2+32 = 32-32-32+32 = 0$ *Por lo tanto a = 2 es raíz de p(x).*

Un polinomio con coeficientes reales de grado n tiene exactamente n raíces reales y/o complejas

Factorización.

Dado un polinomio p(x) de grado n con coeficiente principal a_n, si se conocen todas sus raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$, se puede escribir el polinomio en forma factorizada de la siguiente manera: $p(x) = a_n.(x - r_1).(x - r_2) \quad (x - r_n)$

Esto es, por ejemplo:

Dado el polinomio $p(x) = 2x^4 - 4x^3 - 40x^2 + 132x - 90$,

Halla la forma factorizada sabiendo que sus raíces son: 1 (raíz simple), 3 (raíz doble) y −5 (raíz simple).

Como se conocen las raíces y el coeficiente principal, la forma factorizada es: p(x) = 2(x−1)(x−3)(x−3)(x+5) = 2(x−1)(x−3)2 (x+5)

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen. Las tres primeras son simplemente Fórmulas de Productos Notables escritas a la inversa.

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

Ejemplo:

Usando la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 \quad - \quad B^2 = (A \quad - B)(A \quad + \quad B)$$

Otros ejemplos:

Factorice por completo cada expresión.

(a) $2x^4 - 8x^2$ **(b)** $x^5y^2 - xy^6$

SOLUCIÓN

(a) Primero factorizamos la potencia de x que tenga el exponente más pequeño.

$2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4)$ El factor común es $2x^2$

$= 2x^2(x - 2)(x + 2)$ Factorice $x^2 - 4$ como una diferencia de cuadrados

(b) Primero factorizamos las potencias de x y de y que tengan los exponentes más pequeños.

$x^5y^2 - xy^6 = xy^2(x^4 - y^4)$ El factor común es xy^2

$= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ Factorice $x^4 - y^4$ como una diferencia de cuadrados

$= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$ Factorice $x^2 - y^2$ como una diferencia de cuadrados

Ejercicio 8: encontrar el cociente y resto de las siguientes divisiones

a) $(x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 5) : (x - 1)$
b) $(3x^5 + 2x + 4) : (x + 2)$
c) $(x^4 - 5x^2 + 2) : (x - 5)$

Ejercicio 9: determine cuáles de los números indicados son raíces del polinomio dado:

a) $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$. Los valores $x = -2$, $x = -1$ y $x = 13$.

b) $p(x) = -2x^3 + x^2 - x - 1$. Los valores $x = 2$, $x = -1$ y $x = -12$.

Ejercicio 10: use una fórmula de factorización especial para factorizar las siguientes expresiones

a) $9a^2 - 16$
b) $27x^3 + y^3$
c) $8s^3 - 125t^3$
d) $x^2 + 12x + 36$