



## UNIDAD 1: GUÍA TEÓRICA-PRÁCTICA

### EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS

#### Expresiones Algebraicas

Se denomina **expresión algebraica** a la combinación de números y letras vinculadas por una operación.

Por ejemplo:  $-6.w^2$

En dicha expresión algebraica, cada componente recibe un nombre particular:

- ✓ El valor **-6** recibe el nombre de coeficiente.
- ✓ La expresión  **$w^2$**  recibe el nombre de parte literal, en donde  $w$  es la variable.
- ✓ El punto que indica la multiplicación suele no escribirse, por lo tanto:

$$-6.w^2 = -6w^2$$

#### OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS:

##### Suma y resta

Para sumar o restar expresiones algebraicas solo podremos hacerlo si estamos en presencia de expresiones semejantes. Dos o más expresiones son semejantes cuando tienen la misma parte literal o el mismo exponente de la variable.

Por ejemplo:

$2h^6$  y  $-5h^6$  son semejantes  
 $2h^6$  y  $6h$  no son semejantes (deben tener misma potencia)  
 $2h^6$  y  $2k^6$  no son semejantes (deben tener misma variable y potencia)

Para sumar dos o más expresiones algebraicas que verifiquen ser semejantes, se procede sólo operando los coeficientes, es decir, las partes literales no se operan. Por ejemplo:

$$-2d^2 + 7d^2 = 5d^2$$

En caso de tener alguna expresión que no sea semejante, se deja indicada la suma:

$$3w^3 + 5h^2 - 7w^3 = 5h^2 - 4w^3$$

#### Ejercicio 1: Resolver las siguientes operaciones

- a)  $-3t^2 - 5t^2 + 18t^2 =$
- b)  $w^5 - 9w^5 =$
- c)  $-y^4 - 5y^5 + 16y^4 =$
- d)  $-3h^2 + 3h^2 =$

- e)  $z^2 - 20z^2 + 18z^2 =$
- f)  $-13p^2 - 15p^3 + 8p^4 =$
- g)  $-5o^2 - 14o^2 =$
- h)  $m - 5m^2 + 12m^2 =$

##### Producto y Cociente.

Cuando multiplicamos expresiones algebraicas, se multiplican entre sí los coeficientes con su



signo y las partes literales. En ciertos casos se debe aplicar la ley distributiva.

Por ejemplo:  $4t^2 \cdot (-2t^3) = -8t^5$

✓ Los coeficientes se multiplicaron entre sí

✓ Las partes literales se multiplicaron entre sí: (en este caso, al tener la misma variable, se aplica propiedad de potencias de igual base y se suman los exponentes)

Veamos otro ejemplo:

$$-2w^3 \cdot 3t^2 = -6w^3t^2$$

En este caso, solo se pudo operar entre los coeficientes pero en las partes literales queda indicado el producto.

Con el cociente sucede algo similar, por ejemplo:

$$-10f^6 : (-2f^2) = 5f^4$$

✓ Los coeficientes se dividieron entre sí

✓ Las partes literales se dividieron entre sí: (en este caso, al tener la misma variable, se aplica propiedad de potencias de igual base y se restan los exponentes)

### FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si  $A$  y  $B$  son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

- |                                            |                                     |
|--------------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$            | Suma y producto de términos iguales |
| 2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$           | Cuadrado de una suma                |
| 3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$           | Cuadrado de una diferencia          |
| 4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ | Cubo de una suma                    |
| 5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ | Cubo de una diferencia              |

### Ejercicio 2: Reducir a la mínima expresión

- |                  |                      |                    |
|------------------|----------------------|--------------------|
| a) $a \cdot a =$ | d) $t : t =$         | g) $n \cdot n^3 =$ |
| b) $m + m =$     | e) $5e - 3e =$       | h) $20h^6 : 5h =$  |
| c) $r - r =$     | f) $6b \cdot 2b^2 =$ | i) $2w^4 + 6w^4 =$ |

### Ejercicio 3: Colocar V o F según corresponda

- |                         |                             |
|-------------------------|-----------------------------|
| a) $2x + 3x + x = 5x$   | e) $x + x = x^2$            |
| b) $x - x = 1$          | f) $x \cdot x^3 = x^4$      |
| c) $0 \cdot x = 0$      | g) $2x^3 - 3x^2 = -1x$      |
| d) $2x^2 + 3x^2 = 5x^4$ | h) $x \cdot x \cdot x = 3x$ |



**Ejercicio 4:** Operar y reducir a la mínima expresión

- |                                  |                                          |
|----------------------------------|------------------------------------------|
| a) $3x^2 - 2(x^2 - 5) =$         | d) $(-2x^3 - 8) \cdot (2x^4 - 6) =$      |
| b) $(3x^2 - 3) \cdot (2x - 4) =$ | e) $(-x^3 - 7) \cdot (x^4 - 3) =$        |
| c) $-2(x^5 - 2) =$               | f) $5 \cdot (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 2) =$ |

**Potenciación**

Al potenciar una expresión algebraica, se debe recurrir a las propiedades de dicha operación. Por ejemplo:

$$(-2x^2)^3 = -8x^6$$

**Ejercicio 5:** Resolver las siguientes potencias

- a)  $(-2w^3)^2 =$   
 b)  $(-3t^3)^3 =$   
 c)  $(-s^4)^4 =$   
 d)  $(2k^4)^5 =$

En resumen:

| Cuando sumo o resto                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Cuando multiplico o divido                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Cuando potencio o radico                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Solamente se operan entre sí las expresiones semejantes, es decir la que poseen la misma parte literal (variable y exponente)</p> <p>Ejemplo:</p> $2w^4 - 5w^2 - 7w^4 = -5w^4 - 5w^2$ <p>En caso que no se pueda realizar la operación, se deja expresado de la misma manera:</p> $5p^7 + 4p^2 = 5p^7 + 4p^2$ | <p>Los coeficientes se multiplican o dividen entre sí, y si las partes literales tiene la misma variable, se aplica propiedades de potenciación, si no la tienen se deja expresado el producto o cociente:</p> <p>Ejemplos:</p> $-2t^4 \cdot (-5t^2) = 10t^6$ <p>Los exponentes se suman porque hay multiplicación y tienen la misma base (t)</p> $8t^7 \cdot (-4t^2) = -2t^5$ <p>Los exponentes se restan porque hay división y tienen la misma base (t)</p> $8t^7 : (-3t^2) = -\frac{8}{3}t^5$ <p>Cuando la división no da resultado entero lo dejo expresado como fracción.</p> $2t^7 \cdot (-4w^2) = -8t^7 \cdot w^2$ <p>Se multiplican los números entre sí y las partes literales quedan expresadas como producto.</p> $2t^7 : (-2w^2) = -\frac{1t^7}{w^2}$ <p>Se hace el cociente entre los coeficientes y se deja expresado el cociente entre las partes literales.</p> | <p>Se aplica la propiedad distributiva de la potencia o la raíz respecto del producto y cociente.</p> <p>En el caso de la potenciación se elevan coeficiente y parte literal a la potencia indicada.</p> <p>Ejemplo:</p> $(5 \cdot q^3)^2 = (5)^2 \cdot (q^3)^2 = 25q^6$ <p>En la parte literal se aplica la propiedad de "potencia de potencia" en donde se multiplican los exponentes.</p> <p>En el caso de la radicación, se aplica un procedimiento similar:</p> $\sqrt[3]{8 \cdot r^6} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{r^6} = 2 \cdot r^2$ <p>En el caso de la parte literal se aplica la propiedad</p> $\sqrt[n]{a^m} = \text{se simplifican el índice y el exponente.}$ |



## Polinomios

Un **monomio** es una expresión algebraica de la forma  $ax^k$ , donde:

- ✓ a es un número real
- ✓ k es un entero no negativo.

Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama **polinomio**.

- Un **polinomio** en una variable con coeficientes reales es una expresión de la forma:

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0,$$

donde:

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  son números reales llamados **coeficientes** del polinomio.
- $n$  es un número entero no negativo (puede ser cero) llamado **grado** del polinomio (si  $a_n \neq 0$ ), y se nota  $gr(p(x)) = n$ .
- $x$  es la **variable** del polinomio.

El **grado** de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

El coeficiente  $a_n$  debe ser distinto de cero y se llama **coeficiente principal**. Si el coeficiente principal es 1 se dice que el polinomio es *Mónico*.

El coeficiente  $a_0$  se llama **término independiente**.

| Polinomio                      | Tipo            | Términos                      | Grado |
|--------------------------------|-----------------|-------------------------------|-------|
| $2x^2 - 3x + 4$                | trinomio        | $2x^2, -3x, 4$                | 2     |
| $x^8 + 5x$                     | binomio         | $x^8, 5x$                     | 8     |
| $3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$ | cuatro términos | $-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$ | 3     |
| $5x + 1$                       | binomio         | $5x, 1$                       | 1     |
| $9x^5$                         | monomial        | $9x^5$                        | 5     |
| 6                              | monomial        | 6                             | 0     |

### Operaciones con polinomios:

#### Suma y resta

La adición de dos polinomios se realiza sumando los coeficientes que corresponden a la misma potencia de la variable. En la resta se debe considerar la regla de los signos.



Por ejemplo:

Hallar:

- $p(x) + q(x) =$
- $p(x) - q(x) =$       siendo  $p(x) = 2x^2 + 3$     y     $q(x) = x + 3x^2 + 5$

Calculamos la suma:

$$\begin{array}{r} p(x) = 2x^2 + 0x + 3 \\ + q(x) = 3x^2 + x + 5 \\ \hline p(x) + q(x) = 5x^2 + x + 8 \end{array}$$

Calculamos la diferencia:

$$\begin{array}{r} p(x) = 2x^2 + 0x + 3 \\ - q(x) = -3x^2 - x - 5 \\ \hline p(x) - q(x) = -x^2 - x - 2 \end{array}$$

### Multiplicación

La multiplicación de dos polinomios se realiza aplicando propiedad distributiva. Por ejemplo:

Hallar:  $p(x) \cdot q(x)$ ,      siendo  $p(x) = 3x^3 + x + 5$     y     $q(x) = 2x^2 + 3$

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (3x^3 + x + 5) \cdot (2x^2 + 3) = \\ &= 3x^3 \cdot 2x^2 + 3x^3 \cdot 3 + x \cdot 2x^2 + x \cdot 3 + 5 \cdot 2x^2 + 5 \cdot 3 = \\ &= 6x^5 + 9x^3 + 2x^3 + 3x + 10x^2 + 15 = \\ &= 6x^5 + 11x^3 + 10x^2 + 3x + 15 \end{aligned}$$

**Ejercicio 6:** para cada uno de los polinomios indica grado, coeficiente principal, término independiente

- |                             |                            |
|-----------------------------|----------------------------|
| a) $p(x) = 3 + 5x^5 + 6x^3$ | d) $p(x) = x^4 + 9$        |
| b) $p(x) = 2 - x$           | e) $p(x) = x^2 + 1 + 4x^2$ |
| c) $p(x) = 0$               | f) $p(x) = 3x^4$           |

**Ejercicio 7:** resolver

Considerando los polinomios  $p(x) = x^5 - 3x^2 + 2x$  y  $q(x) = -2x^4 + 5x^2$ , efectúe las siguientes operaciones indicando el grado del polinomio resultante:

- |                            |                        |
|----------------------------|------------------------|
| a) $p(x) - q(x)$ .         | c) $p(x) \cdot q(x)$ . |
| b) $p(x) + 3q(x) + 5x^2$ . | d) $q(x)^2$ .          |



## División

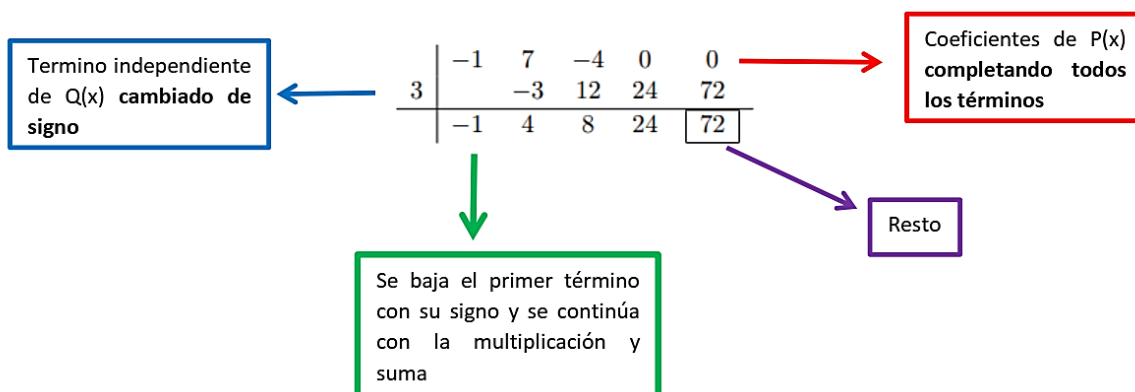
El cociente  $c(x)$  de dividir  $p(x)$  por el polinomio  $q(x) = (x-a)$  se puede calcular por la Regla de Ruffini.

Veamos el siguiente ejemplo:

Halla el cociente de dividir

$$p(x) = -x^4 + 7x^3 - 4x^2$$

$$q(x) = x - 3$$



El cociente es  $c(x) = -x^3 + 4x^2 + 8x + 24$  y el resto es  $r(x) = 72$

## Raíces.

Un número  $r$  es una raíz del polinomio  $p(x)$  si verifica que  $p(r) = 0$ .

Por ejemplo: Verificar si el número  $a = 2$  es raíz de  $p(x) = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32$ . Probamos si  $a = 2$  es raíz calculando  $p(a)$ :

$$p(a) = p(2) = 2^5 - 4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 32 = 32 - 32 - 32 + 32 = 0 \text{ Por lo tanto } a = 2 \text{ es raíz de } p(x).$$

Un polinomio con coeficientes reales de grado  $n$  tiene exactamente  $n$  raíces reales y/o complejas

## Factorización.

Dado un polinomio  $p(x)$  de grado  $n$  con coeficiente principal  $a_n$ , si se conocen todas sus raíces  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , se puede escribir el polinomio en forma factorizada de la siguiente manera:  $p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$

Esto es, por ejemplo:

$$\text{Dado el polinomio } p(x) = 2x^4 - 4x^3 - 40x^2 + 132x - 90,$$

Halla la forma factorizada sabiendo que sus raíces son: 1 (raíz simple), 3 (raíz doble) y -5 (raíz simple).



Como se conocen las raíces y el coeficiente principal, la forma factorizada es:  $p(x) = 2(x-1)(x-3)(x-3)(x+5) = 2(x-1)(x-3)^2(x+5)$

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen. Las tres primeras son simplemente Fórmulas de Productos Notables escritas a la inversa.

#### FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

| Fórmula                                  | Nombre                  |
|------------------------------------------|-------------------------|
| 1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$          | Diferencia de cuadrados |
| 2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$         | Cuadrado perfecto       |
| 3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$         | Cuadrado perfecto       |
| 4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ | Diferencia de cubos     |
| 5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ | Suma de cubos           |

Ejemplo:

Usando la fórmula de Diferencia de Cuadrados con  $A = 2x$  y  $B = 5$ , tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

Otros ejemplos:

Factorice por completo cada expresión.

(a)  $2x^4 - 8x^2$       (b)  $x^5y^2 - xy^6$

#### SOLUCIÓN

(a) Primero factorizamos la potencia de  $x$  que tenga el exponente más pequeño.

$$2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4)$$

El factor común es  $2x^2$

$$= 2x^2(x - 2)(x + 2)$$

Factorice  $x^2 - 4$  como una diferencia de cuadrados

(b) Primero factorizamos las potencias de  $x$  y de  $y$  que tengan los exponentes más pequeños.

$$x^5y^2 - xy^6 = xy^2(x^4 - y^4)$$

El factor común es  $xy^2$

$$= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

Factorice  $x^4 - y^4$  como una diferencia de cuadrados

$$= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

Factorice  $x^2 - y^2$  como una diferencia de cuadrados

**Ejercicio 8:** encontrar el cociente y resto de las siguientes divisiones

- a)  $(x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 5) : (x - 1)$
- b)  $(3x^5 + 2x + 4) : (x + 2)$
- c)  $(x^4 - 5x^2 + 2) : (x - 5)$



***Ejercicio 9:** determine cuáles de los números indicados son raíces del polinomio dado:*

a)  $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ . Los valores  $x = -2$ ,  $x = -1$  y  $x = 13$ .

b)  $p(x) = -2x^3 + x^2 - x - 1$ . Los valores  $x = 2$ ,  $x = -1$  y  $x = -12$ .

***Ejercicio 10:** use una fórmula de factorización especial para factorizar las siguientes expresiones*

a)  $9a^2 - 16$

b)  $27x^3 + y^3$

c)  $8s^3 - 125t^3$

d)  $x^2 + 12x + 36$